**Exercice 1** :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$ ou $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$.
   *Indication* : on pourra montrer $\lfloor x\rfloor \leqslant \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + 1$.
   (b) Montrer que $\lfloor 2x\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right\rfloor$.
   (a) Pour tout entier naturel $n$, déduire de la question précédente une expression simple de $S_n(x)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

**Exercice 2** :

1. Montrer :
$$\forall t \in \left]1,+\infty\right[,\ \ln(t) > 2\times\frac{t-1}{t+1}.$$
2. En déduire : pour tous réels $x$ et $y$ tels que $0 < x < y$, $\frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \frac{x+y}{2}$.
3. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$. Montrer : $T_n < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$.

**Exercice 3** :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 1$. Que pouvons-nous conclure sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?
3. (a) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.