Exercice 1 :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n dx$.

1. Calculer I_0 et montrer que $I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (ne pas forcément se précipiter sur une intégration par parties !).
3. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant I_n + I_{n+2}$ puis montrer que (I_n) converge vers une limite à préciser.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $p_n = I_{2n}$.
   (a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - p_n$.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n-1}p_n = -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$. En déduire :
   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2 :

1. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer :
   $$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln t)^2}\mathrm{d}t.$$
2. En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(\ln j)^2} \leqslant \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}$$
3. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}}$ par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ S_n = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(\ln j)^2}.$$
   Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}}$ converge.

Exercice 3 :

On considère la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$ et en déduire $\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}$.
3. Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
4. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.
5. (a) Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$. *Indication* : c'est la dérivée de ?? en ??.
   (b) En déduire le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.