Exercice 1 : *Deux suites définies par des intégrales*

Pour tout entier naturel n, on pose $x_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\mathrm{d}t$ et $y_n = \int_0^1 t^n \sin(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$ et $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.
2. Calculer x_0 et y_0 puis x_1, y_1 et x_2, y_2.
3. Écrire une fonction Python donnant en sortie le couple (x_n, y_n) en fonction de n.
4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n$.

Exercice 2 : *Équations d'inconnue un polynôme*

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que $2XP' + P = 7X^3 - 3X$.
2. On cherche l'ensemble des polynômes P à coefficiens réels tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P(x+y) = P(x) \times P(y). \tag{1}$$

   (a) Supposons que P soit un polynôme non constant répondant au problème.
   Montrer que P a une infinité de racines. Que conclure ?

   (b) Déterminer alors l'ensemble des polynômes P satisfaisant (1).

   (c) Montrer de deux façons que la fonction exponentielle n'est pas polynomiale.

Exercice 3 : *Factorisation de polynômes*

Soit $P = X^5 - X^3 - 4X^2 - 3X - 2$.

1. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise P et P'.
2. En déduire les racines multiples de P et la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Déterminer également la factorisation de P' dans $\mathbb{C}\,[X]$.