Exercice 1 : **Les questions 1 et 2 sont indépendantes**

Soit $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$ et $Q = X^3 - 7X^2 + 11X - 5$.

1. (a) Montrer que P et Q ont une racine évidente en commun et déterminer son ordre de multiplicité comme racine de P, puis comme racine de Q.

   (b) Factoriser P et Q dans $\mathbb{C}[X]$. Q divise-t-il P?

2. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $1 + X + X^2$ divise $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, la dérivée n-ième de f est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos(x))^{n+1}}$$

   avec, pour tout entier naturel n, la relation $P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n$.

2. Déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 (on trouvera $P_4 = 5 + 18X^2 + X^4$).
3. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.
4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) = n!$.

Exercice 3 :

Soit $P = X^5 - 1$. On souhaite factoriser P par deux méthodes.

1. Montrer qu'il existe 5 complexes z (qu'on déterminera et écrira sous forme exponentielle) solutions de $z^5 = 1$.

   En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{4} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$? En déduire une expression de $z^5 - 1$ sous forme d'un produit de deux termes.

   (b) Factoriser $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis faire de même avec P.