Exercice 1 :

Soit (E) l'équation différentielle :

$$xy' + (1-x)y = 3x^2 + 2.$$

1. Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur $]0,+\infty[$ qui peut se prolonger par continuité en 0 et déterminer cette solution.

Exercice 2 :

Soit l'application $f : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) \end{array} \right.$.

1. Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction continue sur $[0,1]$.
2. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable sur $[0,1]$.
3. Montrer enfin que f ainsi prolongée est de classe C^1 sur $[0,1]$.
   (C'est-à-dire : montrer que f' est continue sur $[0,1]$).

Exercice 3 :

On pose $\varphi(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$.

1. Quel est le domaine de définition de φ?
2. Soit $h \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.
   (a) Pour t appartenant à l'intervalle $]-1,1[$, simplifier $1 - t + \frac{t^2}{1+t}$.
   (b) En déduire : $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \int_0^h \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t$.
   (c) Montrer : $\forall t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $0 \leqslant \frac{t^2}{1+t} \leqslant 2t^2$. En déduire un encadrement de $\int_0^h \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t$.
3. Déduire des questions précédentes l'équivalent $h - \ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2}{2}$.
4. Montrer que φ se prolonge par continuité en 1. Que vaut alors $\varphi(1)$ après prolongement ?