Exercice 1 :

On considère les équations différentielles $(E) : (2-6x+2x^2)y-(3x^2-4x)y'+x^2y''=2$ et $(L) : z''-3z'+2z=2$.

1. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver un entier relatif k tel que $x\mapsto x^k$ soit solution de (E) sur $]0,+\infty[$.
3. Pour cet entier k, montrer que la fonction $u : x\mapsto x^k\times v(x)$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si v est solution de (L) sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2 :

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ l'équation différentielle $(E) : xy'+2y=\frac{x}{1+x^2}$.
2. Rappeler la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ pour $q\neq 1$.
3. Soit $x\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}$.
   (a) Soit $t\in[0,x]$. Montrer que $\frac{1}{1+t^2}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}+(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.
   Que donne cette égalité pour $n=1$?
   (b) En déduire $\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\int_0^x\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
   (c) Montrer que $0\leqslant\int_0^x\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{x^5}{5}$ puis en déduire $\arctan(x)-x\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^3}{3}$.
   (d) Montrer que la fonction $\varphi : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arctan(x)-x}{x^2}\end{array}$ est prolongeable par continuité en 0 puis dérivable en 0 après prolongement.
   Préciser alors la valeur de $\varphi'(0)$ (en notant encore φ la fonction prolongée en 0).
4. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (*indication* : elle doit être solution de (E) sur $]0,+\infty[$, être continue et dérivable en 0).

Exercice 3 : *Une équation fonctionnelle*

On cherche à déterminer dans cet exercice toutes les fonctions continues $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ satisfaisant à la condition (C) suivante

$$(C) : \quad \forall x\in[0,+\infty[\,,\int_0^x(x-3t)f(t)dt=\frac{x^2}{2}$$

1. On suppose que $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, satisfaisant à (C).
   Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ telle que $F(0)=0$. Soit G la primitive de $t\mapsto tf(t)$ sur $[0,+\infty[$ telle que $G(0)=0$.
   (a) Justifier que : $\forall x\geq 0,\ xF(x)-3G(x)=\frac{x^2}{2}$. En déduire : $\forall x>0,\ f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}F(x)-1\right)$.
   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
   (c) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : 2xy'+y=-1$.
   (d) Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$ puis déterminer f en utilisant le fait que f est continue en 0.
2. Déterminer toutes les fonctions continues sur $[0,+\infty[$, satisfaisant à (C).