Exercice 1 :

Soit $I = [0, 1]$. On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ f_0(x) = 1 \text{ et } \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times I,\ f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\mathrm{d}t.$$

1. Pour $x \in I$, déterminer $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
2. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall x \in I,\ f_n(x) = a_n x^{b_n}.$$
On vérifiera au cours du raisonnement que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = \frac{4\sqrt{a_n}}{b_n+2}$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 1$.
3. Écrire une fonction Python prenant n en entrée qui calcule et affiche les $n + 1$ premiers termes de ces suites.
4. Déterminer b_n en fonction de n et en déduire sa limite.
5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 1$.
6. On pose $w_n = 2^n \ln(a_n)$. Montrer que $\lim(w_{n+1} - w_n) = 1$.
7. En déduire : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $w_{n_0} \leqslant w_n \leqslant 2(n - n_0) + w_{n_0}$. En déduire la limite de (a_n).

Exercice 2 :

On définit f par :$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6}$.

1. Montrer que $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ est un intervalle stable par f.
2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^3 x$ puis montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est l'unique solution, dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, de l'équation $x = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6}$.
4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n^3 + \frac{1}{6}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$.
5. (a) Montrer :
$$\forall (x, y) \in \left[0, \frac{1}{4}\right]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x - y|$$
puis
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|u_n - \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right|$$
(b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| \leqslant \frac{1}{4^{n+1}}$ puis une fonction Python prenant en argument un réel strictement positif ε et calculant une valeur approchée de $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ à ε près.

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $P_n(x) = x^3 + nx - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme P_n admet une unique racine réelle que l'on notera x_n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n \leqslant 1$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. En déduire qu'elle converge.

   Par la suite, on se propose de calculer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de deux façons différentes.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_n\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire un encadrement de x_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Retrouver la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en raisonnant par l'absurde.
5. Montrer : $x_n \sim \frac{1}{n}$.
6. Écrire une fonction Python permettant d'obtenir une approximation de x_n à ε près où ε est un réel strictement positif choisi par l'utilisateur.

   Cette fonction prendra en entrée le réel ε.

   Indication : on pourra utiliser l'algorithme de dichotomie rappelé dans la question 2) a) de l'exercice 14 de la liste d'exercices sur les suites.