Exercice 1 :

Dans cet exercice, on se propose de trouver une méthode pour approcher la solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation $\ln(1+x) = x-1$.

1. Montrer que l'équation $\ln(1+x) = x-1$ d'inconnue x admet effectivement une unique solution sur $[0,+\infty[$. On notera par la suite α cette solution.
2. Soit (u_n) une suite définie par : $\begin{cases} u_0 \geqslant 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1+\ln(1+u_n) \end{cases}$
   (a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Etudier la monotonie et le comportement asymptotique de (u_n) suivant que $u_0 \in [0,\alpha]$ ou que $u_0 \in]\alpha,+\infty[$.
3. (a) Justifier que $1 < \alpha < 3$. *On admettra que* $\ln 2 \simeq 0,69$.
   (b) Soit (v_n) et (w_n) les suites définies par : $\begin{cases} v_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 1+\ln(1+v_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} w_0 = 3, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 1+\ln(1+w_n) \end{cases}$. Que pouvons-nous dire de ces deux suites ?
   Décrire alors une méthode permettant d'obtenir une approximation de α.
   (c) On considère la fonction Python ci-dessous :

```python
from math import log

def Mystere(e):
    u = 1
    v = 3
    while v-u > e:
        u = 1 + log(1 + u)
        v = 1 + log(1 + v)
    return (u+v)/2
```

   Expliquer ce que fait cette fonction et préciser le rôle joué par la variable d'entrée `e`.

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $P_n(x) = x^3 + nx^2 + 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme P_n admet une unique racine réelle que l'on notera x_n.

   Calculer x_0.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant -1$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
4. La suite (x_n) étant monotone, elle admet une limite (finie ou non). On se propose de déterminer cette limite de deux façons différentes.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_n(-n)$. En déduire une inégalité portant sur x_n puis la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Retrouver la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en raisonnant par l'absurde.
5. Montrer : $x_n \sim -n$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P_n\left(-n - \frac{1}{n}\right) < 0$. En déduire un encadrement de x_n puis retrouver le résultat de la question précédente.
7. Écrire une fonction Python permettant d'obtenir une approximation de x_n à ε près où ε est un réel strictement positif choisi par l'utilisateur.

   Cette fonction prendra en entrée le réel ε.

   Indication : on pourra utiliser l'algorithme de dichotomie rappelé dans la question 2) a) de l'exercice 14 de la liste d'exercices sur les suites.

Exercice 3 :

On se place dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé.

Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 10\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2x - y + 3z = -3 \\ 4x + 2y - z = 7 \end{cases}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un unique point A dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
3. Trouver une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ passant par A puis déterminer des équations cartésiennes de Δ.
4. Écrire une fonction Python permettant de tester si un point $M : (x, y, z)$ appartient à Δ.