Exercice 1 :

On se place dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal d'origine O.

Soit la droite $\mathcal{D}$ dont $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ est une représentation paramétrique.

1. Calculer la distance $f(t)$ de O au point $M(t)$ de paramètre t de $\mathcal{D}$. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette distance est minimale.

   On note t_0 ce réel et on note H le point $M(t_0)$ (appelé projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$).

   Que vaut la distance OH? (elle représente la distance de O à la droite $\mathcal{D}$).

2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2z = 1$ contient la droite $\mathcal{D}$ puis déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

3. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire la distance OH' où H' est le point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OH'}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

   Retrouver alors la distance de O à $\mathcal{D}$ calculée à la question 1.

Exercice 2 :

On se place dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.
On considère les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations respectives $x^2 + y^2 - 4 = 0$ et $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$.

1. Déterminer les centres Ω et Ω' ainsi que les rayons R et R' de ces cercles.

2. Justifier l'existence du barycentre I du système pondéré $((\Omega, R'), (\Omega', -R))$ et déterminer ses coordonnées.

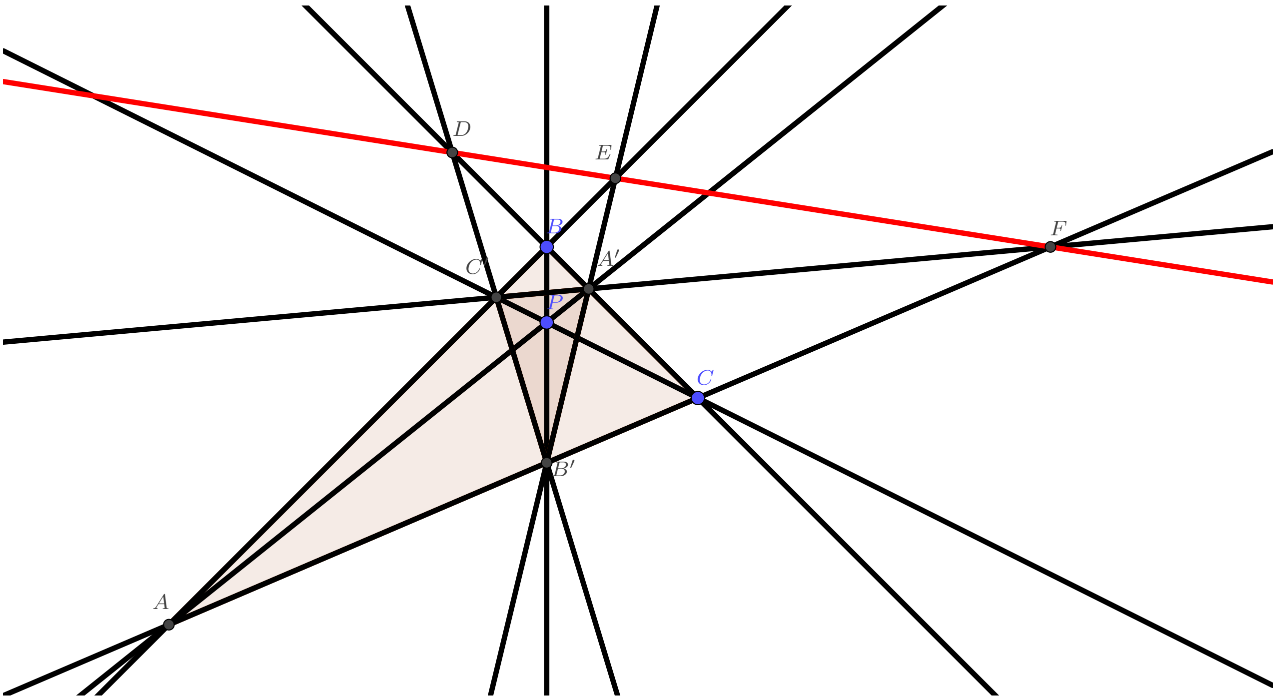
3. Soit $M_0 : (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$. On rappelle que la tangente en M_0 au cercle $\mathcal{C}$ est la droite perpendiculaire à (ΩM_0) passant par M_0 (cette droite coupe alors le cercle $\mathcal{C}$ en un seul point). Déterminer une équation de cette tangente (en fonction de x_0 et y_0).

4. Déterminer le point A de $\mathcal{C}$ d'ordonnée positive tel que la tangente à $\mathcal{C}$ en A passe par I.

5. Montrer que la droite (AI) est aussi tangente à $\mathcal{C}'$.

Exercice 3 :

On suppose que A, B, C sont trois points non alignés du plan affine formant un triangle ABC.
On suppose que P est un point n'appartenant à aucune des droites (AB), (AC) et (BC).
On note respectivement A', B', C' les points d'intersection de (AP) et (BC), (BP) et (AC), (CP) et (AB).
On suppose de plus que $(B'C')$ et (BC) se coupent en un point D, que (AB) et $(A'B')$ se coupent en un point E, et (AC) et $(A'C')$ se coupent en un point F.
L'objectif de l'exercice est de montrer que D, E, F sont alignés.



1. Justifier l'existence de réels k_A, k_B, k_C non nuls et différents de 1 tels que $\overrightarrow{AP} = k_A\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BP} = k_B\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CP} = k_C\overrightarrow{CC'}$.
2. En déduire qu'il existe des réels $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ non nuls et différents de 1 tels que
   P est barycentre de $((A,\alpha),(A',\alpha'))$ et $\alpha + \alpha' = 1$,
   P est barycentre de $((B,\beta),(B',\beta'))$ et $\beta + \beta' = 1$,
   P est barycentre de $((C,\gamma),(C',\gamma'))$ et $\gamma + \gamma' = 1$.
3. En déduire que, pour tout point M du plan,
$$\begin{aligned}\beta\overrightarrow{MB} - \gamma\overrightarrow{MC} &= -\beta'\overrightarrow{MB'} + \gamma'\overrightarrow{MC'}\\ \gamma\overrightarrow{MC} - \alpha\overrightarrow{MA} &= \alpha'\overrightarrow{MA'} - \gamma'\overrightarrow{MC'}\\ \beta\overrightarrow{MB} - \alpha\overrightarrow{MA} &= \alpha'\overrightarrow{MA'} - \beta'\overrightarrow{MB'}\end{aligned}$$
4. (a) Supposons par l'absurde $\beta - \gamma = 0$. Que vaudrait alors $-\beta' + \gamma'$? Déduire de la question précédente une contradiction.
   (b) Soit M un point du plan.
   Réduire le vecteur $\beta\overrightarrow{MB} - \gamma\overrightarrow{MC}$ en un seul vecteur faisant intervenir M et un barycentre G d'un système pondéré.
   En choisissant judicieusement M, montrer que $G \in (BC)$.
   (c) Montrer de même que $G \in (B'C')$ puis $G = D$.
5. En utilisant les égalités de la question 3 et un raisonnement analogue à celui de la question 4, montrer que E et F sont des barycentres de systèmes pondérés à déterminer.
6. Montrer que E est barycentre du système pondéré $((D,\beta-\gamma),(F,\gamma-\alpha))$ puis conclure que D, E, F sont alignés.