**Exercice 1** :

Soit $F_1 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \ \left\{ \begin{array}{c} 3x - y + z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{array} \right. \right\}$ et $F_2$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F_2 = Vect((1,1,-2,1),(-1,3,2,1))$$

1. Montrer que $F_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et trouver une base $\mathcal{B}$ ainsi que la dimension de $F_1$.
2. Déterminer des équations cartésiennes de $F_2$.
3. Déterminer $F_1 \cap F_2$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ formée de deux vecteurs de $F_1$ et de deux vecteurs de $F_2$.

**Exercice 2** :

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs $(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ou liée ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Soit $\mathcal{G}$ la famille de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ définie par $\mathcal{G} = ((2,-2,2),(-1,1,-7),(6,9,2))$.
   (a) $\mathcal{G}$ est-elle une famille libre ou liée ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Déterminer la matrice de $\mathcal{G}$ dans la base $\mathcal{F}$ puis retrouver les résultats de la question précédente.

**Exercice 3** :

On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{b} = (2,1,3)$, $\overrightarrow{c} = (4,5,3)$, et le sous-espace vectoriel $F = Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ de $\mathbb{R}^3$. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.

1. Déterminer la dimension et une base de $F$.
2. Trouver une ou des équations cartésiennes caractérisant $F$.
3. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs orthogonaux et non nuls de $F$.
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $F$.
   (b) On suppose de plus ici $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$ et on se donne un vecteur $\overrightarrow{w}$ de $F$.
   Il existe donc deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$ ($\lambda, \mu$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$).
   Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v}$.
4. On note $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ les deux vecteurs de la base de $F$ trouvée à la question 1).
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{z} = \lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. Montrer que
   $$\overrightarrow{z} \perp \overrightarrow{x} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{x}\|^2}.$$
   (b) En déduire une base orthogonale de $F$ puis une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $F$.
   (c) Vérifier que $(1,1,1) \in F$ et déterminer les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$.