Exercice 1 :

Si a, b, c, d sont des réels, on note $f_{a,b,c,d}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{a,b,c,d}(x) = (a + bx)\cos(x) + (c + dx)\sin(x)$$

On note E l'ensemble des fonctions $f_{a,b,c,d}$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer la dérivée de $f_{a,b,c,d}$ et déterminer $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(f_{a,b,c,d})' = f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$. On exprimera $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction de a, b, c, d.
2. On note $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application qui associe à (a, b, c, d) le quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ défini à la question précédente.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer Kerφ et Imφ. Qu'en déduire sur φ ?
3. (a) Déterminer φ^{-1}.
   (b) En déduire une primitive de la fonction $g : x \mapsto (2 + 3x)\cos(x) + (1 - 4x)\sin(x)$.

Exercice 2 :

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par : $V = Vect((1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5))$.
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z, t) = (x-y+z+t, x+2z-t)$.

1. Calculer $\dim V$ et trouver une base $\mathcal{B}_1$ de V.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de Ker$f$.
3. Notons $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}$ les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ tels que $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{x})$ où $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont les bases trouvées précédemment.
   (a) Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x})$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) En déduire que tout vecteur $\overrightarrow{z}$ de $\mathbb{R}^4$ s'écrit **de manière unique** sous la forme $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ où $\overrightarrow{a} \in V$ et $\overrightarrow{b} \in$Ker$f$.
   (c) Déterminer $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans le cas où $\overrightarrow{z} = (1, 2, 3, 1)$.
   (d) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (2x + y + z,\ x + 2y + z,\ 3z)$$

1. Déterminer Ker$(f - 3Id)$, Ker$((f - 3Id)^2)$ et Ker$(f - Id)$ (on déterminera une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels).
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que Ker$(g) \neq$Ker(g^2).
   (a) Montrer que Ker$(g) \subset$Ker(g^2) et justifier l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{u} \in$Ker$(g^2) \setminus$Ker(g).
   (b) Montrer que, pour un tel vecteur $\overrightarrow{u}$, la famille $(g(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{u})$ est une famille libre de Ker(g^2).
3. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.