Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f a un unique point fixe sur I que l'on déterminera.
2. Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

On note g l'application de J dans I, bijection réciproque de $f : I \to J$.

3. Montrer que g est dérivable sur J et que : $\forall x \in J$, $g'(x) = \frac{g(x)}{1+g(x)}$.
   En déduire la valeur de $g'(1)$.
4. Montrer que $g(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} y$.

Exercice 2 :

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{5}$.

1. Montrer que f possède sur $[0,1]$ un unique point fixe noté α.
2. Soit $(a,b) \in [0,1]^2$. Montrer $|f(b) - f(a)| \leq \frac{8}{15}|b-a|$.
   (*Indication* : on vérifiera l'inégalité si $a = b$ et, si $a \neq b$, on appliquera la formule des accroissements finis à f sur le segment d'extrémités a et b).
3. On définit la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{8}{15}\right)^n \times |u_0 - \alpha|$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
4. Écrire une fonction Python prenant un réel strictement positif ε en entrée et donnant en sortie une valeur approchée de α à ε près.

Exercice 3 : **Les deux questions 1) et 2) sont indépendantes.**

1. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. On fixe $c \in \mathbb{R}\backslash[a,b]$. On veut montrer qu'il existe une tangente à la courbe de f passant par le point de coordonnées $(c, 0)$.
   (a) Faire un dessin représentant sur un exemple ce que l'on doit montrer.
   (b) On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x-c}$. Justifier l'existence d'un réel $u \in]a,b[$ tel que $g'(u) = 0$.
   (c) Conclure.
2. Soit $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0,a]$, $f'(x) > 0$. On veut montrer l'existence d'un réel k strictement positif tel que $\forall x \in [0,a]$, $f(x) \geq kx$.
   Pour cela, on posera $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,a]$.
   (a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On notera encore g la fonction ainsi prolongée (donc définie et continue sur $[0,a]$).
   (b) Justifier : $\forall x \in [0,a]$, $g(x) > 0$.
   (c) Conclure.