Exercice 1 :

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ et n un entier naturel non nul.

   (a) Justifier que $|f'|$ admet un maximum sur $[0,1]$. On note désormais M ce maximum.

   (b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et $x \in [\![\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]\!]$.
   Démontrer $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M \times \left(\frac{k}{n} - x\right)$.

   (c) En déduire :
   $$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n^2}$$
   puis
   $$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

   (d)

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ et f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Justifier :
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f(a + t(b-a))\mathrm{d}t$$

   (b) En posant $M = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, en déduire
   $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

   (c) Quel résultat retrouve-t-on quand n tend vers $+\infty$?

   (d) En reprenant les notations ci-dessus, écrire une fonction Python prenant en entrée a, b, n, f, M et donnant en sortie une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à 10^{-5} près.

Exercice 2 : *Les questions 1) et 2) sont indépendantes*

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{4n} \times \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{4n-k}}$.

   (a) Montrer que (u_n) converge. On exprimera la limite L de (u_n) sous forme d'une intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

   (b) À l'aide du changement de variable $x = 4\sin^2(\theta)$ dans l'intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, montrer que $L = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x))\,\mathrm{d}x$.

   (a) À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - x$, montrer $I = \frac{\pi}{4}\ln(2) - I$.

   (b) En déduire la valeur de I.

Exercice 3 :

On dispose de trois urnes A, B et C contenant chacune 6 boules blanches ou noires.
L'urne A contient 4 boules blanches et 2 boules noires.
L'urne B contient 3 boules blanches et 3 boules noires.
L'urne C contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. *Première expérience* : On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **sans remise**, deux boules de cette urne.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires.
   (b) Sachant qu'on a obtenu deux boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne C?

2. *Deuxième expérience* : avec les conditions initiales décrites par l'énoncé, On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **avec remise**, n boules de cette urne.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir n boules noires.
   (b) Sachant qu'on a obtenu n boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne C? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter.
   (c) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'évènement : "La première boule noire a été tirée au k-ième tirage". Calculer $P(A_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   (d) Décrire l'évènement contraire de $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. En déduire :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)=3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

   (e) Déterminer la limite de $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$ quand n tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.