Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $3n$ boules dont n boules blanches et $2n$ boules noires.
Une personne fait une partie du jeu suivant :
Il tire successivement, avec remise, n boules de l'urne. Il lance alors un dé non pipé à 6 faces autant de fois qu'il obtenu de boules blanches aux tirages précédents.
S'il obtient au moins une fois le chiffre 6 avec le dé, il gagne 5 €, sinon il perd la partie.
Dans tous les cas (qu'il gagne ou qu'il perde), la partie lui coûte 1 €.
Soit X le nombre de boules blanches obtenues par le joueur au cours des n tirages.
Soit A l'événement : "Le joueur obtient au moins une fois le chiffre 6 avec le dé" et $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

1. Écrire une fonction Python prenant n en entrée, simulant l'expérience aléatoire et donnant en sortie, sous forme de liste, les scores obtenus avec le dé.
2. Déterminer la loi de X.
3. (a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(\overline{A})$.
   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire le calcul de $P(\overline{A})$ puis de $P(A)$.
4. Soit G le gain relatif du joueur à l'issue du jeu.
   (a) Déterminer $E(G)$.
   (b) A partir de quelle valeur de n le jeu est-il en faveur du joueur (c'est à dire $E(G) > 0$) ? (On donne $\frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}{\ln\left(\frac{17}{18}\right)} \simeq 3,9$)

Exercice 2 : **Société de transport**

Chaque jour, une entreprise envoie un colis. Elle utilise les services des sociétés de transport A ou B.
La probabilité pour que la société A livre le colis avec retard est de 0,1, alors que la probabilité pour que la société B livre avec retard est 0,2. On suppose les retards successifs et indépendants.
L'entreprise décide d'utiliser la société A pendant n jours consécutifs (n étant un entier naturel non nul). On note X la variable aléatoire égale au nombre de jours où le colis arrive en retard.

1. Déterminer la loi de X et simuler la variable aléatoire X à l'aide d'une fonction Python prenant n en entrée.
2. Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de X.
3. La société A fait payer à l'entreprise un prix de 8 euros par colis livré sans retard, la livraison étant gratuite pour tout colis livré avec retard. On note W le prix payé par l'entreprise sur une période de n jours.
   (a) Exprimer W en fonction de X.
   (b) En déduire le prix moyen payé par l'entreprise sur la période de n jours. Quelle est la variance de W?
4. Pour des raisons tarifaires, l'entreprise décide d'utiliser la société B dans 60% des cas, et la société A dans 40% des cas.

(a) Un jour donné, calculer la probabilité pour que le colis arrive en retard.

(b) Un jour donné, le colis arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait été livré par la société A?

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de deux urnes : l'urne U_1 contient n boules blanches et n boules noires et l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 2 boules noires.

On tire *simultanément* n boules de U_1 et on les met dans l'urne U_2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées de U_1.

1. Déterminer la loi de X et donner son espérance. On admet que $V(X) = \frac{n^2}{4(2n-1)}$
2. A l'issue du transfert de boules, on tire une boule de U_2.

   On note E l'évènement : "on tire une boule blanche dans U_2".

   (a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(E)$.

   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire $P(E) = \frac{E(X)+1}{n+3}$ puis calculer $P(E)$ uniquement en fonction de n.

   (c) Écrire une fonction Python prenant n en entrée, simulant l'expérience aléatoire, et donnant en sortie

   True si E est réalisé et False sinon.

3. Maintenant, à l'issue du transfert de boules, au lieu de tirer une boule de U_2, on tire *simultanément* deux boules de U_2. On note F l'évènement : "on tire deux boules blanches dans U_2".

   (a) Calculer $P_{(X=0)}(F)$ puis, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(F)$.

   (b) En déduire $P(F) = \frac{V(X)+E(X)^2+E(X)}{(n+2)(n+3)}$ puis calculer $P(F)$ uniquement en fonction de n.