Un complexe et des sommes...

Exercice 1 :

Les trois questions suivantes sont largement indépendantes.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $\beta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1) Calculer et simplifier la somme $R = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k$.

2) Montrer que le nombre S défini par

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta^k$$

est réel.

3) Soit $T = \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^k$.

Développer et simplifier la quantité $(1-\beta) \times T$ puis en déduire une expression de T.

Déterminer les entiers n tels que T est un réel.

Calcul exact d'un cosinus

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de calculer $\cos \frac{\pi}{5}$.

1. Si $z \in \mathbb{C} \backslash \{-1\}$, rappeler la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{4} (-z)^k$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^* \backslash \{-1\}$. Écrire le nombre complexe
$$q(z) = \frac{1+z^5}{z^2(1+z)}$$
en fonction du nombre complexe $u(z) = z + \frac{1}{z}$.
3. On pose $\omega = e^{i\frac{\pi}{5}}$. Calculer $q(\omega)$ et en déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$.

Quelques sous-ensembles de $\mathbb{C}$

Exercice 3 :

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que
$$\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1.$$
2. Si $z \in \mathbb{C} \backslash \{5\}$, démontrer
$$\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |z-1|^2 = 8.$$
3. Soit $R > 0$ et $w = u + iv$ un nombre complexe (où $u, v \in \mathbb{R}$).

   En passant par la forme algébrique de z, à quoi correspond dans le plan l'ensemble des points images des complexes z tels que $|z-w|^2 = R^2$?

   En déduire l'ensemble des nombres complexes z tels que $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.