Exercice 1 :

Soit E un ensemble. Si X et Y sont deux parties de E, on note $X \triangle Y$ la partie de E définie par :

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y).$$

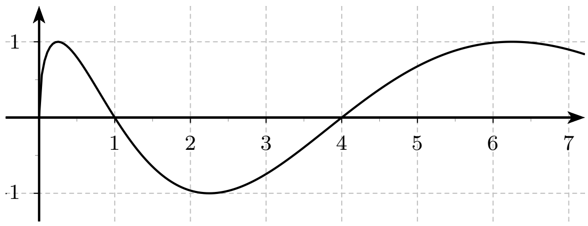
1. (a) Faire un dessin représentant X et Y et hachurer la partie $X \triangle Y$ de E.
   (b) Montrer : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$, $X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et f_A l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f_A(X) = X \Delta A.$$

   (a) Montrer : $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $(X \Delta A) \Delta A = X$. Que cela signifie-t-il sur l'application $f_A \circ f_A$?
   (b) En déduire que f_A est bijective et expliciter la bijection réciproque f_A^{-1}.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application dont on a représenté le graphe ci-dessous :



1. f est-elle injective ? Justifier votre réponse. f semble-t-elle surjective ?
   On considère $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to [-1,1] \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$. L'application g est-elle injective ? Semble-t-elle surjective ?
2. On admet que $f(x) = \sin(\pi\sqrt{x})$ pour tout $x \geqslant 0$.
   (a) Étudier les variations de f sur $[0,4]$.
   (b) Déterminer un intervalle $I \subset [0,4]$ tel que $h : \left| \begin{array}{l} I \to [-1,1] \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ réalise une bijection de I sur $[-1,1]$.
   Déterminer la bijection réciproque h^{-1}.

Exercice 3 :

Soit $f(x,y) = \ln\left(\frac{1-x^2}{1+y}\right)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f (on mettra en évidence une réunion de produits cartésiens).
2. Déterminer la ligne de niveau 0 de f, c'est-à-dire l'ensemble des réels $(x,y) \in D_f$ tels que $f(x,y) = 0$. Représenter graphiquement cette ligne de niveau.
3. Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction $g : t \mapsto f(0,t)$ et étudier ses variations sur D_g (en précisant les limites aux bornes).
4. L'application $\left| \begin{array}{l} D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{array} \right.$ est-elle injective ? Surjective ? Justifier.