Exercice 1 :

1. Soit (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n+4}$.

   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   De quel type est la suite (v_n)?

   (c) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

2. *Généralisation*
   Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $c \neq a$. Décrire une méthode permettant de calculer le terme général w_n d'une suite (w_n) définie par :

$$w_0 \in \left]0, +\infty\right[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \frac{aw_n}{bw_n + c}.$$

   Comment faire si $c = a$?

Exercice 2 :

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{2+u_n}$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ / $u_n = \frac{a_n}{b_n}$.
   On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont récurrentes linéaires d'ordre deux.
   En déduire u_n en fonction de n ainsi que sa limite (quand n tend vers $+\infty$).

Exercice 3 : **Les deux questions sont indépendantes.**

1. Étudier le système linéaire ci-dessous (calcul du rang, détermination de l'ensemble des solutions) :

$$(S) : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 8x + y - z = 7 \end{cases}$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction polynôme $P : x \longmapsto a+bx+cx^2$ de degré 2 (où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$) telle que $P(-1) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ et la déterminer.