Exercice 1 :

Un scientifique étudie une population de souris femelle uniquement. Il note les propriétés suivantes :

- Chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année ;
- la probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de 0,25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de la deuxième année.

On distingue donc deux catégories de souris femelles : les jeunes, âgées de moins d'un an et les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans.

Notons pour tout entier naturel n, après n années, j_n le nombre de jeunes souris femelles et a_n le nombre de souris adultes femelles.

On considère que la population initiale est composée de 20 jeunes souris femelles et d'aucune souris adulte femelle.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1} en fonction de j_n. Exprimer j_{n+1} en fonction de j_n et a_n.
   Écrire une fonction Python prenant n en entrée et calculant j_n et a_n en sortie.
2. Montrer que $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 puis, pour tout entier naturel n, calculer j_n en fonction de n.
3. On désigne par t_n le nombre total de souris femelle après n années. Justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n.$$
4. Déterminer la limite de $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
5. Vers quelle répartition jeunes/adultes semble tendre la population ?

Exercice 2 : (pour faire plaisir à Gauthier...)

1. (a) Écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ (où $p, q \in \mathbb{N}^*$) les trois nombres $0,2017$, $0,00002017$ et $0,000000002017$.
   On définit à présent la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $y_1 = 0,2017$, $y_2 = 0,20172017$, $y_3 = 0,201720172017$, etc., $y_n = 0,2017\ldots2017$ où le nombre 2017 apparaît n fois dans le développement.
   (b) Écrire une fonction Python prenant n en entrée et donnant y_n en sortie.
   (c) Donner une expression simple de y_n en fonction de n.
   (d) Déterminer deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\frac{p}{q} = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0,20172017\ldots2017\ldots$.
2. En s'inspirant de la méthode précédente, montrer que le nombre $1,99999999\ldots$ n'est autre que 2.

Exercice 3 :

Soit $(S_{\lambda,a})$ le système $\begin{cases} (9-\lambda)x+2y-10z=1 \\ -2x+(4-\lambda)y-z=2 \\ 4x+2y-(5+\lambda)z=a \end{cases}$ dépendant des paramètres réels λ et a.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe exactement trois valeurs λ_1, λ_2, λ_3 de λ telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et $rg(S_{\lambda,a}) < 3$.
2. On suppose $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Dans chacun des trois cas, déterminer la valeur de a pour laquelle $(S_{\lambda,a})$ est compatible.
3. Résoudre $(S_{\lambda,a})$ dans le cas où $\lambda = \lambda_3$ et $a = 1$.

Exercice 4 : (Les deux questions sont indépendantes)

1. Pondérer l'équation chimique (non pondérée) ci-dessous :

$$KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \to MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$$

(La réaction du permanganate de potassium et du sulfate de manganèse dans de l'eau produit du dioxyde de manganèse, du sulfate de potassium et de l'acide sulfurique).

2. Un parking comporte un ensemble de 66 véhicules constitué de voitures, camions, motos et vélos. Le nombre de voitures est quatre fois celui des camions et motos réunis, et le nombre total de roues est égal à 252 (on considère que chaque camion possède quatre roues). Sachant qu'il y a strictement plus de motos que de vélos, déterminer le nombre exact de chacun des quatre types de véhicules.