Exercice 1 :

Soit x un réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

1. Déterminer un encadrement judicieux de u_n (simplifier au maximum les termes de l'encadrement autres que u_n).
2. Vérifier alors que (u_n) est une suite de nombres rationnels qui converge vers x.[1]
3. En déduire une fonction Python `Approxim` prenant en entrée un réel x, un réel $\varepsilon > 0$, et donnant en sortie un couple (a, b) d'entiers tel que $\frac{a}{b}$ est une approximation de x à ε près (c'est-à-dire tel que $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$).

Exercice 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{1+x} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$

2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

3. Déterminer alors la limite de H_n quand n tend vers $+\infty$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}$.

1. On dit que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est **dense** dans $\mathbb{R}$: Pour tout réel x et tout $\varepsilon > 0$, on pourra toujours trouver un nombre rationnel dans l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ (ici, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$, il existera toujours un rang n_0 tel que, $\forall n \geq n_0$, $u_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$).

Les deux derniers exercices ne sont pas indépendants mais peuvent être traités dans l'ordre que l'on veut (toutefois, l'ordre naturel serait de traiter l'exercice 3 avant le 4). L'objectif de ces deux exercices est de montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on posera $E_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et $f_n(x) = e^x\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)$.

1. (a) Pour tout entier naturel n, justifier que E_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$, établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_n'(x) = E_{n-1}(x)$$

   (b) Justifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = f_{n-1}(x) - e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) \leqslant E_n(x) \leqslant e^x$.

   Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x\left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x$$

Exercice 4 :

1. Dans cette question, nous nous fixons un réel x positif ou nul et on cherche à démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'écriture du produit $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{x}{k}$.

   (b) On note p le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $2x$ et on pose $A = \prod\limits_{k=1}^{p-1} \frac{x}{k}$.

   Démontrer :

$$\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{x}{k} \leqslant A \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p+1}$$

   (c) Conclure.

2. A l'aide de l'encadrement établi dans l'exercice 3, démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

3. Toujours à l'aide de l'encadrement de l'exercice 3, déterminer un encadrement de $e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $(x, n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$.

   En déduire une fonction Python `ApproxExp` prenant en entrée un réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, un réel $x \in [0, 10]$ et donnant en sortie une valeur approchée de e^x à ε près.

   On fournit $e^{10} \simeq 22026,466$ et on **impose** que le code de la fonction `ApproxExp` n'utilise pas la fonction exp ou le nombre e (ce qui lui ferait perdre tout son intérêt...).