Chapitre 13 : **Caractère local des fonctions : limite et continuité en un point**

I - Définitions et premières propriétés

Définition du contexte de cette section et des propriétés vraies au voisinage d'un point.

1) Limites finies

2) Limites infinies

3) Continuité

4) Prolongement par continuité

5) Limites et continuité à droite et à gauche

6) Caractère local de la limite et de la continuité

II - Limites et ordre

1) Les théorèmes généraux

2) Limites des fonctions monotones

III - Opérations sur les limites

1) Opérations algébriques sur les limites finies

2) Opérations sur les limites infinies

3) Composition des limites

4) Application à la continuité

Continuité des fonctions usuelles (polynômes, rationnelles, puissance, ln, exp, trigonométriques)

IV - Relations de comparaison

1) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

2) Propriétés des équivalents

3) Comparaisons usuelles

a) Polynômes et fonctions rationnelles

b) Puissances entre elles

c) Puissances et logarithme

d) Puissances et exponentielle

4) Equivalents usuels

5) Equivalents et composition

Mises en garde

V - Quelques exemples de calculs de limites

Annexe :

Comparaisons classiques (preuve des résultats sur les croissances comparées, et inégalités classiques sur les fonctions usuelles)

Critère séquentiel des limites (Application à la non existence de limite)

Exemples de compétences attendues

❶ Maîtriser les formules de croissances comparées.
Connaître les équivalents usuels, les propriétés de exp, ln et $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

❷ Savoir ce que signifie qu'une fonction est continue en un point a et savoir montrer qu'une fonction est continue en a.

❸ Savoir déterminer si une fonction est prolongeable par continuité en un point et, après prolongement, si elle est dérivable en ce point, voire de classe C^1 au voisinage de ce point.

❹ Savoir utiliser les équivalents (et notamment les équivalents usuels) au service des calculs de limites.

Exemples de questions de cours possibles :

- Démontrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ puis, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}\right) = 0$.
- Montrer $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
- Donner les équivalents usuels et indiquer comment ils se démontrent.

Chapitre 14 :

I - Equations différentielles linéaires du premier ordre

1) Vocabulaire

2) Solutions des EDL1 homogènes et résolues : $y' + a(x)y = 0$

3) Solutions des EDL1 résolues et quelconques : $y' + a(x)y = b(x)$

4) Condition de Cauchy

II - Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1) Vocabulaire

2) Solutions des EDL2 à coefficients constants, homogènes et résolues : $y'' + ay' + by = 0$

3) Solutions des EDL2 à coefficients constants, résolues et quelconques : $y'' + ay' + by = c(x)$

4) Condition de Cauchy

Savoir-faire :

Résoudre (formellement) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 (avec ou non condition(s) de Cauchy).
(pour l'ordre 2, si le second membre n'est pas constant, une indication doit être donnée dans la recherche d'une solution particulière.)

Exemples de questions de cours possibles :

- Dans les trois cas, formules des ensembles de solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène et à coefficients constants.
  Exemple d'application sur une EDL2 homogène à coefficients constants.
- Résolution (sur un exemple) d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants et à second membre constant.

Pas de modèle d'évolution de population (Malthus, Verhulst, ou Gompertz). Nous verrons cela plus tard..