Chapitre 17 : **L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et ses sous-espaces vectoriels**

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I - L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

1) Définition de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

2) Règles de calculs

3) Exemples

II - Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

1) Définition et exemples

2) Combinaisons linéaires

III - Indépendance linéaire, base

1) Familles libres, familles liées

2) Base d'un sous-espace vectoriel

IV - Théorie de la dimension

1) Dimension d'un sous-espace vectoriel

2) Familles libres, familles génératrices et dimension

3) Dimension et inclusion

4) Rang d'une famille de vecteurs

V - Utilisation des matrices

1) Matrice d'une famille finie de vecteurs

2) Rang d'une matrice (bis)

(définition par l'algèbre linéaire et non algorithmique :

c'est la dimension du sous-espace engendré par les vecteurs colonnes.

Cohérence entre les deux définitions)

Exemples de calculs de rangs de familles de vecteurs et interprétation sur la nature de la famille.

Exemples de compétences attendues

❶ Savoir justifier qu'une partie de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
(en utilisant la définition, ou en mettant en évidence une famille génératrice)

❷ Savoir déterminer un système d'équations cartésiennes décrivant un sous-ev de $\mathbb{K}^n$
à partir d'une famille génératrice du sous-ev.

❸ Savoir effectuer le procédé inverse : déterminer une famille génératrice d'un sous-ev
de $\mathbb{K}^n$ à partir d'un système d'équations cartésiennes décrivant celui-ci.

❹ Savoir déterminer si une famille est libre ou liée.

❺ Pour $n = 2, 3, 4$, savoir montrer qu'une famille de vecteurs est une base de $\mathbb{K}^n$ en déterminant dans le même temps l'expression des coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{K}^n$ dans cette base. Savoir déterminer la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

❻ Si E est un sous-ev de $\mathbb{K}^n$, savoir trouver une base de E
en trouvant d'abord une famille génératrice de E puis en montrant qu'elle est libre.

❼ Si $m = \dim E$ est connu, savoir montrer qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E
est une base de E en vérifiant :

- que $\mathcal{F}$ est génératrice de E et $Card\mathcal{F} = m$, ou
- que $\mathcal{F}$ est libre et $Card\mathcal{F} = m$.

❽ Savoir montrer l'égalité de deux sous-ev de $\mathbb{K}^n$: Si E et F sont deux sous-ev de $\mathbb{K}^n$ tels que $E \subset F$ et $\dim E = \dim F$, alors $E = F$.

❾ Savoir utiliser les techniques matricielles pour calculer le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs d'un sous-ev E de $\mathbb{K}^n$ et détérminer

- si la famille $\mathcal{F}$ est libre ($Card\mathcal{F} = rg\mathcal{F}$) ou liée,
- si $\mathcal{F}$ est une base de $Vect\mathcal{F}$ ($Card\mathcal{F} = rg\mathcal{F}$),
- si $\mathcal{F}$ est génératrice de E ($rg\mathcal{F} = dimE$) et, le cas échéant, si $\mathcal{F}$ est une base de E ($Card\mathcal{F} = rg\mathcal{F} = dimE$).

❿ Parallèlement au calcul du rang de $\mathcal{F}$,

- savoir extraire de $\mathcal{F}$ une base de $Vect\mathcal{F}$,
- savoir déterminer une relation de dépendance linéaire sur $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est une famille liée.

Chapitre 18 : **Applications linéaires**

I - Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

1) Définitions et exemples

2) Noyau et image d'une application linéaire

3) Opérations sur les applications linéaires

4) Applications linéaires et bases

5) Applications linéaires et dimension

II - Utilisation des matrices

1) Matrice d'une application linéaire

2) Matrices d'applications linéaires et opérations

3) Lien avec le rang d'une matrice

4) Applications linéaires, matrices et systèmes linéaires

Remarques

On ne traite dans ce chapitre **que** des applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

Exemples de compétences attendues

❶ Maîtriser les définitions du noyau, de l'image, du rang d'une application linéaire.

❷ Savoir montrer qu'une application est linéaire.

❸ Savoir calculer le rang d'une application linéaire.

❹ Savoir trouver une base du noyau et de l'image d'une application linéaire.

❺ Savoir déterminer si une application linéaire est injective, surjective ou bijective (dont le cas particulier des endomorphismes).

❻ Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans les bases canoniques.
Savoir effectuer le procédé inverse : retrouver une application linéaire à partir de sa matrice dans les bases canoniques.

❼ Savoir traduire matriciellement les opérations usuelles sur les applications linéaires.

❽ Savoir déterminer la bijection réciproque d'une application linéaire bijective.

❾ Savoir calculer la matrice d'une application linéaire dans des bases quelconques.

Questions de cours possibles :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les bases d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{K}^n$ sont les familles libres et génératrices de E.
- Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels respectivement de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.
- Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
  Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = \mathbb{K}^n$.
  Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.