Chapitre 19 : Fonctions continues sur un intervalle

I - Généralités sur les fonctions réelles continues sur un intervalle

1) Fonctions continues changeant de signe sur un intervalle

Théorème 1 : (existence de solution à l'équation $f(x) = 0$. Preuve algorithmique par dichotomie.)

Conséquences, applications classiques

Corollaire 1 : (théorème des valeurs intermédiaires)

Corollaire 2 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(I)$ est un intervalle.

2) Fonctions réelles continues sur un segment

Théorème 2 : (l'image d'un segment par une application continue est un segment)

II - Continuité et monotonie

1) Résultats généraux

Théorème 3 : Image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue strictement monotone f.

Théorème 4 : (théorème de la bijection)

2) Fonctions réciproques d'une bijection continue

a) Fonctions racines n-ièmes

b) La fonction arctan

Exemples de compétences attendues

❶ savoir justifier qu'une fonction continue s'annule et savoir utiliser l'algorithme de dichotomie,

❷ savoir que l'image d'un intervalle (resp. d'un segment) par une fonction continue est un intervalle (resp. un segment),

❸ savoir rédiger et utiliser le théorème de la bijection.

❹ Connaître les propriétés de la fonction arctan (variations, valeurs remarquables, imparité...).

Questions de cours possibles :

- Donner le code Python de l'algorithme de dichotomie et savoir l'expliquer.
- Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.
- Si a, b sont deux réels tels que $a \leqslant b$, montrer que si $f : [a, b] \to [a, b]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Chapitre 20 : **Fonctions dérivables**

I - Définitions et propriétés élémentaires

1) Notion de dérivée

2) Propriétés élémentaires

II - Opérations sur les dérivées

1) Opérations algébriques

2) Dérivée d'une fonction réciproque

III - Accroissements finis

1) Le théorème de Rolle

2) La formule des accroissements finis

3) Dérivée et variation des fonctions

IV - Dérivées d'ordre supérieur

1) Fonctions de classe C^n

Dérivées n-ième de cos, sin, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \ln x$.

2) Les théorèmes généraux (pour les fonctions de classe C^n ou C^∞)

3) Fonctions réciproques

Exemples de compétences attendues

1. Savoir étudier les variations d'une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles,
2. Savoir rédiger et utiliser le théorème de Rolle,
3. Savoir rédiger et utiliser le théorème des accroissements finis,
4. Savoir justifier la dérivabilité d'une bijection réciproque f^{-1} et utiliser la formule $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$,
5. Connaître les dérivées successives de quelques fonctions usuelles (cos, sin, ln, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, ln, exp).

Questions de cours possibles :

- Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
- Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis (en utilisant le théorème de Rolle).
- Énoncer précisément le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque f^{-1} (avec la formule pour $(f^{-1})'$).