# Chapitre 21 Compléments sur l'intégration

## I - Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

### 1) Définition et premières propriétés

### 2) Existence de primitives et premiers exemples

## II - Intégrale d'une fonction continue sur un segment

### 1) Définition, lien avec la notion de primitive

### 2) Propriétés fondamentales de l'intégrale

### 3) Interprétation géométrique de la notion d'intégrale pour une fonction continue

### 4) Théorème de la valeur moyenne, sommes de Riemann

## III - Méthodes de calcul intégral

### 1) Intégration de fonctions rationnelles

**a) Intégration des fonctions du type $t \longmapsto (t-a)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)**

**b) Intégration des fonctions du type $f : t \longmapsto \frac{at+b}{t^2+pt+q}$** (seulement le cas où $p^2 - 4q \geqslant 0$).

### 2) Intégration par parties

### 3) Changement de variable

## IV - Extension de la notion d'intégrale

Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

## V - Equations autonomes du type $y' = g(y)$

Éléments de résolution de ces équations. Cas de l'équation de Verhulst et de l'équation de Gompertz.

**Exemples de compétences attendues**

❶ Connaître les propriétés usuelles de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

❷ Savoir étudier une fonction définie par une intégrale fonction de ses bornes.

❸ Savoir utiliser et rédiger une intégration par parties.

❹ Savoir reconnaître et calculer une somme de Riemann.

❺ Savoir effectuer un changement de variable.

❻ Savoir calculer une primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$ avec $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ dans le cas où le dénominateur n'a que des racines **réelles** (décomposition en éléments simples).

❼ Connaître (et savoir mener) la méthode de résolution d'équations autonomes simples.

*Questions de cours possibles* :

- Énoncer **correctement** et démontrer la formule d'intégration par partie.
  Énoncer **correctement** et démontrer la formule de changement de variable.
- Énoncer **correctement** les formules sur les sommes de Riemann (cas où on travaille sur le segment $[0, 1]$) et application à un calcul simple de limite d'une somme de Riemann quand le pas tend vers 0.

## Chapitre 22 Espaces probabilisés finis

### I - Dénombrement

#### 1) Définitions et généralités

Ensembles équipotents, ensembles finis, cardinal d'un ensemble fini.

Cardinal d'une résunion finie d'ensembles finis deux à deux disjoints.

Cardinal d'une réunion de deux ensembles finis.

Cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis.

#### 2) Dénombrements usuels

### II - Espaces probabilisés finis

#### 1) Univers et événements

#### 2) Notion de probabilité

### III - Probabilité conditionnelle et théorèmes principaux

#### 1) Définition

#### 2) La formule des probabilités composées

#### 3) La formule des probabilités totales

#### 4) La formule de Bayes

#### 5) Indépendance

**Annexe : Quelques outils pour effectuer des simulations aléatoires avec Python**

**Exemples de compétences attendues**

❶ Savoir calculer le cardinal d'une réunion disjointe (ou d'une réunion quelconque de deux ensembles).

❷ Savoir comment et quand utiliser le passage par dénombrement du complémentaire.

❸ Savoir utiliser la technique du "découpage" en petits ensembles plus faciles à dénombrer.

❹ Savoir modéliser les situations combinatoires à l'aide d'un vocabulaire précis.

❺ Connaître et utiliser les dénombrements usuels (nombre de parties d'un ensemble, nombre de parties à $k$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments, nombre de $p$-listes avec ou sans répétition...).

❻ Dans des cas simples, savoir modéliser et dénombrer l'univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.

❼ Connaître et savoir utiliser les propriétés d'une probabilité.

❽ Savoir calculer des probabilités d'évènements à l'aide de la probabilité uniforme.

*Questions de cours possibles* :

❶ Énoncer les propriétés du cardinal d'un ensemble fini (cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis deux à deux disjoints, cardinal d'une réunion de deux ensembles finis).

Donner les formules pour les dénombrements usuels (nombre de parties d'un ensemble fini, nombre de parties de cardinal $k$ d'un ensemble fini, nombre de $p$-listes (avec ou sans répétition) d'un ensemble fini $E$).

❷ Donner la définition et les propriétés d'une probabilité sur un univers fini (*cf* propriétés ci-dessous).

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Alors :

- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles, alors $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un sce, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

❸ Démontrer les propriétés ci-dessous :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Alors :

- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$