Chapitre 22 Espaces probabilisés finis

I - Dénombrement

1) Définitions et généralités

Ensembles équipotents, ensembles finis, cardinal d'un ensemble fini.

Cardinal d'une résunion finie d'ensembles finis deux à deux disjoints.

Cardinal d'une réunion de deux ensembles finis.

Cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis.

2) Dénombrements usuels

II - Espaces probabilisés finis

1) Univers et événements

2) Notion de probabilité

III - Probabilité conditionnelle et théorèmes principaux

1) Définition

2) La formule des probabilités composées

3) La formule des probabilités totales

4) La formule de Bayes

5) Indépendance

Annexe : Quelques outils pour effectuer des simulations aléatoires avec Python

Exemples de compétences attendues

1. Savoir calculer le cardinal d'une réunion disjointe (ou d'une réunion quelconque de deux ensembles).
2. Savoir comment et quand utiliser le passage par dénombrement du complémentaire.
3. Savoir utiliser la technique du "découpage" en petits ensembles plus faciles à dénombrer.
4. Savoir modéliser les situations combinatoires à l'aide d'un vocabulaire précis.
5. Connaître et utiliser les dénombrements usuels (nombre de parties d'un ensemble, nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, nombre de p-listes avec ou sans répétition...).
6. Dans des cas simples, savoir modéliser et dénombrer l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
7. Connaître et savoir utiliser les propriétés d'une probabilité.
8. Savoir calculer des probabilités d'évènements à l'aide de la probabilité uniforme.

Questions de cours possibles :

❶ Énoncer les propriétés du cardinal d'un ensemble fini (cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis deux à deux disjoints, cardinal d'une réunion de deux ensembles finis).

Donner les formules pour les dénombrements usuels (nombre de parties d'un ensemble fini, nombre de parties de cardinal k d'un ensemble fini, nombre de p-listes (avec ou sans répétition) d'un ensemble fini E).

❷ Donner la définition et les propriétés d'une probabilité sur un univers fini (*cf* propriétés ci-dessous).

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Alors :
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles, alors $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1,\ A_2, \dots,\ A_n)$ est un sce, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

❸ Démontrer les propriétés ci-dessous :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Alors :
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Chapitre 23 Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

I - Variables aléatoires réelles

1) Généralités

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

3) Fonction de répartition

4) Image d'une variable aléatoire réelle par une application

5) Espérance et moments

Théorème de transfert, variance, écart-type.

6) Inégalités classiques

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

II - Lois de probabilité usuelles

1) La loi certaine

2) La loi uniforme

3) Loi de Bernoulli

4) Loi binomiale

5) Loi hypergéométrique

Exemples de compétences attendues

Si X est une variable aléatoire finie,

1. Savoir donner sa loi (données de $X(\Omega)$ et des $P(X = k)$ avec $k \in X(\Omega)$),
2. savoir déterminer sa fonction de répartition F_X,
3. savoir calculer $E(X)$ et $V(X)$ (espérance et variance de X),
4. Si $u : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une application, savoir déterminer la loi de $u(X)$ et savoir calculer directement $E(u(X))$ (par le théorème de transfert).
5. Savoir simuler (avec `Python`) une variable aléatoire dans des cas assez simples ou dans le cas où la loi est usuelle.
6. Connaître les caractéristiques des lois usuelles et reconnaître les situations où elles interviennent. Savoir justifier rigoureusement pourquoi on a affaire à telle ou telle loi.

Questions de cours possibles :

- Énoncer et démontrer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Définitions et propriétés des lois usuelles (Bernoulli, binomiale, uniforme, hypergéométrique).
- Calcul des espérances d'une variable suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ et d'une variable suivant la loi binomiale de paramètre (n, p).