Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n \sin(\frac{t\pi}{2})dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-ce que (I_n) est convergente ?
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que $\forall t \in [0,1]\,,\ 0 \leq t^n \sin(\frac{t\pi}{2}) \leq t^n$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déterminer la limite de (I_n).
4. (a) A l'aide de deux intégrations par parties, établir :

   $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{\pi^2}{4(n+1)(n+2)} I_{n+2}$

   (b) Quelle est la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 :

1. Soit $y \in]0,1[$. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto (y-1)\ln(x) + \ln(x+y)$ sur l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$.
3. Montrer : $\forall x \in]0,1[\,,\ \forall y \in]0,1[\,,\ x^y > \frac{x}{x+y}$.
4. En déduire : $\forall x \in]0,1[\,,\ \forall y \in]0,1[\,,\ x^y + y^x > 1$.

Exercice 3 :

Les deux questions 1 et 2 ci-dessous sont indépendantes :

1. (a) Étudier les variations de $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) En déduire l'entier naturel n non nul tel que $\sqrt[n]{n}$ est maximal.
2. Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. Pour tout réel t non nul, on pose

$$M_t(x,y) = \left(\frac{x^t + y^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

   Pour tout réel t, on définit également $g(t)$ par :

$$g(t) = \ln\left(\frac{x^t + y^t}{2}\right).$$

   (a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(t)$ pour tout réel t.

   (b) Rappeler la définition du nombre dérivé $g'(0)$.

   (c) En déduire :

$$\lim_{t\to 0} M_t(x,y) = \sqrt{xy}.$$