Exercice 1 :

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1. Soit $P = X^3 + pX^2 + X + q$ où $(p, q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
   Déterminer p et q pour que P admette une racine triple puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Trouver le ou les polynômes P de $\mathbb{C}_5\,[X]$ tels que $(X+2)^3$ divise $P+256$ et $(X-2)^3$ divise $P-256$.

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité de taille 3.

1. Calculer A^2 puis trouver a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^{n+1} - 2X^n - X + 2$.
   (a) Montrer que P admet deux racines évidentes. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que ces racines sont simples.
   (b) En déduire un polynôme de degré 2 qui divise P.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $A^{n+1} - 2A^n - A + 2I_3 = 0$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $G_n = A^n + A - 2I_3$.
   Trouver une relation de récurrence entre G_{n+1} et G_n, puis en déduire A^n en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe des entiers naturels x_n et y_n tels que :
   $$A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix}$$
   et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = 2(x_n + y_n) \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$.
2. Montrer que la suite $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et déterminer la valeur de $x_n - y_n$ pour tout entier naturel n.
3. En déduire une relation entre x_{n+1} et x_n valable pour tout entier naturel n, puis déterminer x_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel non nul n.