Exercice 1 :

Soit P un polynôme de degré 2019 vérifiant :

$$\forall k \in [\![0, 2019]\!],\ P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de $P(2020)$. Pour cela, on pose $Q = (X+1) \times P(X) - X$.

1. Déterminer le degré de Q.
2. Déterminer toutes les racines de Q. En déduire la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ à son coefficient dominant près.
3. Calculer $Q(-1)$. En déduire le coefficient dominant de Q.
4. Calculer $Q(2020)$ puis $P(2020)$.
5. Écrire une fonction Python prenant en entrée un réel x et donnant en sortie $P(x)$. On prendra soin de tester cette fonction pour qu'elle donne des résultats corrects au moins pour x "pas trop grand" et positif.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de 1 par : $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

1. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, la dérivée n^e de f existe et est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et qu'il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

   On montrera au cours du raisonnement que l'on a la relation de récurrence valable pour tout entier naturel n :

   $$P_{n+1} = (1-X)P_n' + (n+2-X)P_n.$$

2. Donner les expressions de P_0, P_1, P_2 et P_3.
3. Déterminer le monôme dominant de P_n (ce qui revient à la donnée du degré et du coefficient dominant de P_n).
4. Calculer $P_n(1)$ pour tout entier naturel n (en justifiant).

Exercice 3 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) De quel type est la matrice A?
   (b) Calculer A^3. En déduire une expression de A^3 en fonction de A.
   (c) Déterminer le polynôme Q tel que $Q(X+1) = X^3 + 6X$.
   (d) Que vaut $Q(A+I)$? En déduire que $I+A$ est inversible et calculer sa matrice inverse.
2. On passe dans cette question à un cas plus général. On suppose que M est une matrice carrée antisymétrique de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et on note I_n la matrice unité de taille n. On admettra que $I_n + M$ est alors une matrice inversible. On pose $C = (I_n - M) \times (I_n + M)^{-1}$.
   (a) Montrer que $I_n - M$ est inversible puis que C est inversible.
   (b) Montrer que ${}^tC = (I_n - M)^{-1} \times (I_n + M)$.
   (c) i. Montrer que, si U et V sont des matrices carrées de même taille telles que V est inversible et $U \times V = V \times U$, alors
   $$U \times V^{-1} = V^{-1} \times U.$$
   ii. En déduire que ${}^tC = C^{-1}$.
3. En reprenant les notations de la question 1), en déduire que $(I - A) \times (I + A)^{-1}$ est inversible et calculer simplement sa matrice inverse.