**Exercice 1** :

On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $I_n$ la matrice unité de taille $n$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^p = 0$ pour un certain entier naturel $p$.
   Montrer que $I_n - A$ est inversible, d'inverse $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$, c'est-à-dire : $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
2. En déduire que $B$ est inversible et calculer $B^{-1}$.
3. Utiliser une autre méthode pour montrer que $B$ est inversible et pour calculer $B^{-1}$.
4. Calculer $B^n$ pour tout entier naturel $n$.
5. Écrire une fonction Python prenant en entrée une matrice carrée $A$ et un entier naturel non nul $p$.
   Cette fonction devra calculer et donner en sortie la somme $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$ (si $A$ est carrée de taille $n$). On importera la bibliothèque `numpy` via l'instruction `import numpy as np`.
   *À faire chez soi* : utiliser cette fonction ainsi que `np.linalg.inv` pour vérifier les résultats obtenus aux questions 1) et 2).

**Exercice 2** :

Soit $(E) : x(1+x)y' + y = \arctan(x)$.

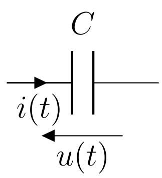
1. (a) Déterminer des réels $a$, $b$, $c$ tels que : $\forall x \in ]0, +\infty[\,,\ \frac{1}{(1+x)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+x} + \frac{b+cx}{x^2+1}\right)$.
   (b) En déduire une primitive $F$ de $x \mapsto \frac{1}{(1+x)(x^2+1)}$ sur $]0, +\infty[$.
2. (a) Soit $g(x) = -\frac{\arctan(x)}{x+1} + F(x)$. Calculer $g'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
   (b) Résoudre alors sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $(E)$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'expression de la solution $\varphi$ de $(E)$ telle que $\varphi(1) = a$ puis écrire une fonction Python prenant en entrée un réel $a$ et traçant le graphe de la fonction $\varphi$ solution de $(E)$ sur $[1, 10]$ telle que $\varphi(1) = a$.
   On importera `matplotlib.pyplot` via l'instruction `import matplotlib.pyplot as plt` et, si besoin, les bibliothèques `math` via `import math as m` et `numpy` via `import numpy as np`.

**Exercice 3** :

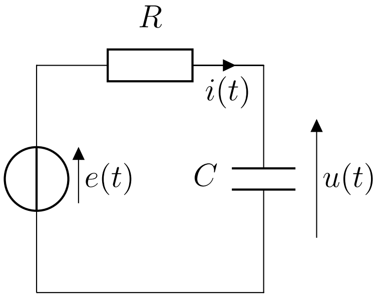
On rappelle qu'un condensateur de capacité $C$ (en farad) dans un circuit électrique est traversé à l'instant $t$ par un courant $i(t)$ satisfaisant à la relation

$$i(t) = C \times \frac{du(t)}{dt} = C \times u'(t)$$

où $u(t)$ est la tension aux bornes du condensateur à l'instant $t$ comme indiqué dans le schéma ci-dessous.



On considère le circuit ci-contre :




où $e$ est une tension sinusoïdale : $e(t) = E_m \times \cos(\omega t)$ (où $E_m > 0$ est l'amplitude du signal). On cherche à déterminer l'expression de la tension $u(t)$ en fonction de $t$.

On posera dans la suite $\tau = RC$.

1. Utiliser la loi des mailles pour établir une relation entre $e, u, R$ et $i$.
2. En déduire une équation différentielle linéaire du premier ordre $(E)$ satisfaite par la tension $u$ aux bornes du condensateur.
3. (a) Donner l'expression des solutions de cette équation différentielle en fonction de $\tau, \omega$, $E_m$ et une constante indéterminée.

   (On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.)

   (b) Écrire la solution particulière précédemment trouvée sous la forme $t \mapsto \lambda\cos(\omega t + \varphi)$ où $\varphi \in \left]-\pi, \pi\right]$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

   On justifiera que $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et on exprimera $\varphi$ en fonction de $\tau$ et $\omega$.

   On exprimera $\lambda$ en fonction de $E_m$, $\tau$ et $\omega$.

   (c) Déterminer la solution $u$ telle que $u(0) = 0$ (cas où le condensateur est déchargé à l'instant initial).
4. (a) Écrire une fonction Python prenant en entrée $R, C, \omega$ et une liste $[E_m^1, E_m^2, \ldots, E_m^n]$ de réels strictement positifs et affichant $n$ graphiques de la tension $u$ en fonction du temps (pour $t \in [0, 2 \times 10^{-1}]$), sachant que $u(0) = 0$. Ici, $E_m^1, E_m^2, \ldots, E_m^n$ sont les différentes amplitudes du signal sinusoïdal $e$ correspondant chacune à un des $n$ graphiques.

   On importera `matplotlib.pyplot` via l'instruction `import matplotlib.pyplot as plt` et, si besoin, les bibliothèques `math` via `import math as m` et `numpy` via `import numpy as np`.

   ---

   (b) Pour $n = 3$ et $(R, C, f) = (100, 10^{-6}, 50)$ (où $f$ est la fréquence du signal $e$ en Hertz. On rappelle que $\omega = 2\pi f$), la fonction précédente a affiché les graphiques ci-contre.

   Déterminer les amplitudes $E_m^1, E_m^2, E_m^3$ de la liste $[E_m^1, E_m^2, E_m^3]$ fournie en entrée de la fonction sachant qu'ici $E_m^1 < E_m^2 < E_m^3$ et que ces trois nombres sont des entiers.