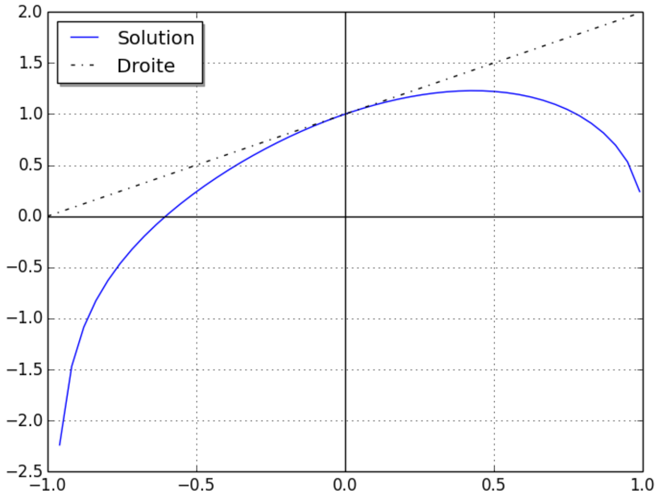
Exercice 1 :

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$.
2. Soit λ un paramètre réel à déterminer. On considère l'équation différentielle

$$(E) : (1-x^2)y' + y = \lambda(1-x^2)\sqrt{1-x}$$

Nous avons représenté ci-dessous la courbe représentative d'une solution f de cette équation différentielle sur $]-1,1[$ ainsi que la droite d'équation $y = x+1$.



(a) En observant les caractéristiques de f en 0, déterminer la valeur du paramètre λ.

(b) Résoudre alors complètement (E) sur $]-1,1[$.

(c) Résoudre de même (E) sur $]-\infty,-1[$.

(d) Écrire un programme Python qui permettrait de reproduire le graphique présenté ci-dessus.

Exercice 2 :

On veut trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \cos(x) - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

1. On suppose dans cette question que f est solution du problème.

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel x.

Montrer de même que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

(b) En déduire les calculs de $f(0)$, $f'(0)$ et une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.

On notera (E) cette dernière équation différentielle.

(c) Trouver l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et solutions de (E).

Indication : On pourra chercher une solution particulière sous la forme $\varphi : x \mapsto a\cos(x)$ où a est un réel à déterminer.

(d) En déduire la fonction f.

2. Déterminer la ou les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions du problème, c'est-à-dire telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \cos(x) - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 :

On se propose de résoudre, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$(E) :\ x^2y'' - xy' + y = 2x$$

Si y est une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t).$$

1. Montrer que si y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ alors z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (G) suivante :

$$(G) : z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 2e^t.$$

   Réciproquement, montrer que si z est solution de (G) sur $\mathbb{R}$, alors y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation différentielle (G) sur $\mathbb{R}$ (on pourra chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda t^2e^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$).
3. Conclure alors quant à l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.