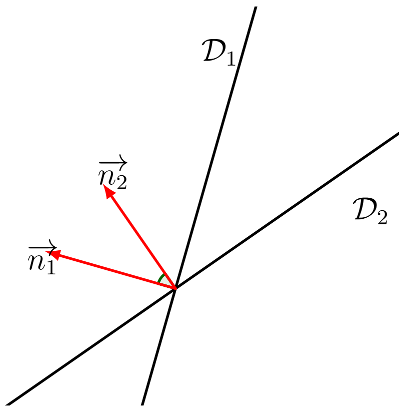
Exercice 1 : *Bissectrice de deux droites*

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Introduisons la notion de mesure de l'angle orienté de deux droites.

Supposons que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$. On suppose que $\overrightarrow{n_1}$ a pour affixe $r_1e^{i\theta_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ pour affixe $r_2e^{i\theta_2}$ (où r_1 et r_2 sont des réels strictement positifs).

On dira que $\theta_2 - \theta_1$ est une mesure de l'angle orienté de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (dans cet ordre). Tout autre nombre de la forme $\theta_2 - \theta_1 + k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) est également une mesure de l'angle orienté de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (voir dessin ci-contre).



Dans la suite, $\mathcal{D}$ est une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}'$ une droite d'équation cartésienne $a'x + b'y + c' = 0$ (où a, b, c, a', b', c' sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$).

On suppose que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

On notera z le complexe $a + ib$ et z' le complexe $a' + ib'$. On supposera que $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\theta'}$ sont des écritures de z et z' (respectivement) sous forme exponentielle (où $r = |z|$ et $r' = |z'|$).

1. On note Δ l'ensemble des points à égale distance de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

   (a) Montrer que $M : (x, y)$ appartient à Δ si et seulement si $r' \times |ax + by + c| = r \times |a'x + b'y + c'|$.

   (b) En déduire que Δ est la réunion de deux droites Δ_1 et Δ_2 dont les équations sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} \Delta_1 \quad &: \quad (\cos\theta + \cos\theta')x + (\sin\theta + \sin\theta')y + \frac{c}{r} + \frac{c'}{r'} = 0 \\ \Delta_2 \quad &: \quad (\cos\theta - \cos\theta')x + (\sin\theta - \sin\theta')y + \frac{c}{r} - \frac{c'}{r'} = 0 \end{aligned}$$

   (Δ_1 et Δ_2 sont les *bissectrices* des deux droites sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$)

2. Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires.

3. Déterminer, sous forme exponentielle, l'affixe d'un vecteur normal à Δ_1.

4. En déduire qu'une mesure de l'angle orienté de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est le double d'une mesure de l'angle orienté de $\mathcal{D}$ et Δ_1.

5. Déterminer des équations cartésiennes des bissectrices des deux droites d'équations $5x - 12y + 7 = 0$ et $3x + 4y - 7 = 0$.

Exercice 2 :

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives $(-2,-4)$, $(2,-8)$ et $(4,-4)$.

1. On se propose de déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et C par deux méthodes. On note Ω le centre du cercle $\mathcal{C}$.

   (a) *Première méthode* :

   En utilisant le fait que A, B et C sont équidistants du centre Ω, déterminer les coordonnées de Ω puis le rayon de $\mathcal{C}$. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

   (b) *Deuxième méthode* :

   On rappelle que la médiatrice d'un segment $[PQ]$ est l'ensemble des points équidistants de P et Q. Soit P et Q deux points du plan. On note Δ la médiatrice du segment $[PQ]$ et I le milieu de $[PQ]$.

   i. Soit M un point du plan. Montrer : $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{MI} = 0$. En déduire que Δ est une droite dont on précisera un point et un vecteur normal.

   ii. En déduire des équations cartésiennes des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ puis déterminer Ω, le rayon et enfin une équation de $\mathcal{C}$.

2. On note $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont à l'équation :

$$x^2 + y^2 + 16x + 4y + 28 = 0.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{C}'$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   (b) Déterminer le lieu d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 3 :

On travaille dans l'espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

On considère les droites $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -5 - \lambda \end{cases}$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont concourantes en un point que A que l'on déterminera.
2. Donner une équation cartésienne du plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
3. Donner des équations cartésiennes de chacune de ces droites.
4. Donner des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire la droite passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.