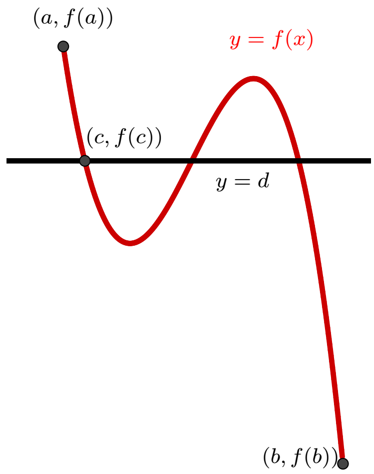
Exercice 1 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \neq f(b)$. Soit d un réel appartenant à l'intervalle ouvert d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. On veut montrer l'existence d'un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = d$.
Supposons par exemple $f(a) > f(b)$
(donc $f(b) < d < f(a)$).
On pose $A = \{x \in [a,b],\ f(x) \leqslant d\}$.



1. Justifier que A est non vide et que cet ensemble admet une borne inférieure. On notera c cette borne inférieure.
2. Justifier que $c \in [a,b]$ et que $f(c) \leqslant d$.
3. Justifier que $c > a$ puis comparer $f(x)$ et d si $x \in [a,c[$ (justifier). En déduire $f(c) \geqslant d$.
4. Conclure.
5. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f_t(x) = x^3 + tx - 1$.
   (a) Justifier que l'équation $f_t(x) = 0$ admet une unique solution x sur $[0,1]$.
   (b) Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et telle que $g(a)g(b) < 0$ alors $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires donc 0 appartient à l'intervalle ouvert d'extrémités $g(a)$ et $g(b)$.
   Les questions 1), 2), 3) et 4) ci-dessus nous assurent alors l'existence d'un réel $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$.
   On rappelle ci-dessous l'algorithme de dichotomie qui, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, permet d'avoir une valeur approchée à ε près d'un réel $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$.
   - On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$
   - Tant que $b_n - a_n > \varepsilon$, on pose $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ (milieu de $[a_n, b_n]$) et :
     si $g(a_n)g(c_n) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$,
     sinon $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$

   Écrire une fonction Python prenant en entrée des réels a, b, une fonction g (telle que décrite ci-dessus), un réel $\varepsilon > 0$ et donnant en sortie une valeur approchée d'une solution $c \in [a,b]$ de $g(c) = 0$ à ε près (on traduira donc en langage Python l'algorithme ci-dessus).
   (c) En déduire une fonction Python prenant en entrée un réel $t \in \mathbb{R}_+^*$ et donnant en sortie une approximation à 10^{-5} près du réel $x \in [0,1]$ tel que $x^3 + tx - 1 = 0$.

Exercice 2 :

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}}$. Préciser le domaine de définition de f.

   Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0?

2. Préciser le domaine de définition de la fonction $g : x \longmapsto (1+x)^{\ln x}$.

   Peut-on prolonger cette fonction par continuité en 0? Si oui, est-elle alors dérivable en 0? (après prolongement)

3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{3}{x^3-1} - \frac{2}{x^2-1}$. Préciser le domaine de définition de g.

   Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 1? Est-elle prolongeable par continuité en -1?

Exercice 3 :

1. Soit $P = 2X^4 - 5X^3 + 5X^2 - 3X + 1$. Montrer que P a une racine multiple dont on déterminera la valeur et l'ordre de multiplicité.

2. On pose $f(x) = \frac{P(x)}{\ln(x)}$. Quel est le domaine de définition de f? Montrer que f peut se prolonger par continuité en 1. On note désormais f la fonction ainsi prolongée.

   Que vaut alors $f(1)$? Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

3. Déterminer une équation $y = T(x)$ de la tangente à la courbe de f en 1.

4. (a) Déterminer la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f(x) - T(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \times g(x)$.

   (b) Établir : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) \geqslant 0$. En déduire la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1.