Exercice 1 :

Soit $a \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.
Pour tout réel x, on posera $f(x) = x^2 - x + 1$.

1. Étudier les variations de f sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et montrer que f admet, sur $\mathbb{R}$, un unique point fixe β que l'on déterminera (on constatera que $\beta \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$).
2. Que pouvons-nous dire des intervalles $\left[\frac{1}{2}, \beta\right]$ et $[\beta, +\infty[$?
3. Écrire une fonction Python prenant a en entrée et représentant sur un graphique les 10 points de coordonnées (k, u_k) pour $k \in [\![0, 10]\!]$.
   Tester cette fonction pour $a \in \left[\frac{1}{2}, \beta\right]$ et pour $a \in [\beta, +\infty[$. Que conjecturer ?
4. Étudier le comportement asymptotique de (u_n) suivant que $a \in \left[\frac{1}{2}, \beta\right]$ ou $a \in [\beta, +\infty[$.

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera désormais γ leur limite commune.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
3. Écrire une fonction Python prenant en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et donnant en sortie une valeur approchée de γ à ε près.

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel non nul et (E_n) l'équation d'inconnue x (où $x \in \mathbb{R}$) :

$$x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire que cette suite converge.
4. Justifier $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$. En déduire la valeur de la limite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.