Exercice 1 :

1. Soit $t \in [0,1]$. Pour tout réel x, on pose $f_t(x) = x + \frac{1}{2}\left(t - x^2\right)$.
   Déterminer le tableau de variations de f_t et déterminer son ou ses points fixes sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Soit $t \in [0,1]$. On pose $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0(t) = 0$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - (u_n(t))^2\right)$$
   (a) Calculer $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
   (b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge vers une limite qu'on exprimera en fonction de t.
3. (a) Montrer :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \sqrt{t} - u_{n+1}(t) = \left(\sqrt{t} - u_n(t)\right) \times \left(1 - \frac{\sqrt{t} + u_n(t)}{2}\right).$$
   (b) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant \sqrt{t} - u_n(t) \leqslant \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}.$$
   (c) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant \sqrt{t} - u_n(t) \leqslant \frac{2}{n}.$$
   et retrouver le résultat du 2) b).

Exercice 2 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $\cos(x) = nx$ d'inconnue le réel x.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la notera x_n.
2. Montrer que $x_n \in]0,1[$ pour tout entier naturel n non nul.
3. Montrer que (x_n) est strictement décroissante. En déduire que (x_n) converge. On note L sa limite.
4. On suppose ici que $L > 0$.
   Déterminer la limite de $\cos(x_n)$ et de nx_n quand n tend vers $+\infty$. Conclure.
5. Déterminer un équivalent simple de x_n.

Exercice 3 : (*suite de l'exercice 2*)

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On reprend la notation x_n introduite dans l'exercice 2.
Dans cette question, $u_0 = 0$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+1} = \frac{\cos(u_p)}{n}$. On cherche à montrer que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers x_n.

1. Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\cos(x) - \cos(y)| \leqslant |x - y|$.
2. En déduire : $\forall p \in \mathbb{N},\ |u_{p+1} - x_n| \leqslant \frac{1}{n}|u_p - x_n|$ puis $\forall p \in \mathbb{N},\ |u_p - x_n| \leqslant \frac{1}{n^p}$.
3. Conclure et donner un entier naturel p (en fonction de n) telle que $\forall k \geqslant p$, on ait $u_k \simeq x_n$ à 10^{-5} près.
4. Écrire une fonction Python prenant en entrée un entier $n \geqslant 2$, un réel $\varepsilon > 0$, et donnant en sortie une valeur approchée de x_n à ε près.