**Exercice 1** :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_p})$ une base de $F$ et $\mathcal{C} = (\overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_q})$ une base de $G$.

On note $F+G$ l'ensemble $\{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\,;\,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) \in F\times G\}$ et $\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ la famille de vecteurs $(\overrightarrow{b_1}, \dots, \overrightarrow{b_p}, \overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_q})$.

1. (a) Montrer que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

   (b) Montrer que $\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ est génératrice de $F+G$.

   (c) On suppose ici : $F\cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

      i. Montrer que la famille $\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ est libre. Que peut-on en déduire sur la famille $\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ ?

      ii. En déduire que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

2. On suppose ici $n=3$, $F = \{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3,\ x=y=z\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3,\ x+y+z=0\}$.

   (a) Déterminer $F\cap G$.

   (b) Déterminer une base de $F$ et une base de $G$.

   (c) Soit $\overrightarrow{u}\in\mathbb{K}^3$ où $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$. Déterminer deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tels que $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\in F\times G$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$.

**Exercice 2** : *Exercices en vrac (les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes)*

1. Déterminer le ou les couples de réels $(a,b)$ tels que la famille $((1,2,3,4),(2,3,4,5),(3,4,a,b))$ soit une famille liée de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$ (où $n\in\mathbb{N}^*$). On pose $\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\overrightarrow{e_j}$ et, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{e_i}$.

   On suppose que $(\mu_1,\dots,\mu_p)\in\mathbb{K}^p$ est tel que $\sum_{i=1}^{p}\mu_i\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$.

   (a) Justifier que : $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\mu_i + \left(\sum_{j=1}^{p}\mu_j\right)\lambda_i = 0$.

   (b) En déduire que $\sum_{j=1}^{p}\mu_j = 0 \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,p]\!],\ \mu_i = 0$ et également que $\left(\sum_{j=1}^{p}\mu_j\right)\times\left(1+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\right) = 0$.

   (c) En déduire que la famille $(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p})$ est liée si et seulement si $\sum_{j=1}^{p}\lambda_j = -1$.

3. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel $G$ de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ \left\{\begin{array}{l} x-y+2z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \end{array}\right.\right\}.$$

**Exercice 3** :

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par : $W = Vect((1,3,1,1),(-2,-2,5,1),(-2,6,19,a))$

1. Calculer $\dim W$ en fonction de $a$.
2. On suppose désormais (et pour les questions qui suivent) que la valeur de $a$ est telle que $\dim W$ est minimal. Déterminer une base de $W$.
3. Donner un système d'équations cartésiennes de $W$.
4. En déduire que $\overrightarrow{u} = (0,4,7,3)$ et $\overrightarrow{v} = (3,5,-4,0)$ sont des vecteurs de $W$. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est-elle une base de $W$?
5. Compléter la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en une base de $\mathbb{R}^4$ (c'est-à-dire : trouver $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans $\mathbb{R}^4$ tels que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est une base de $\mathbb{R}^4$).