Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par : $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ f(x,y,z,t) = (y,z,t,x)$.

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$.
2. Identifier f^2, f^3 et f^4 (où $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ et $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$).
3. On note J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que J est inversible et déterminer, sans calculs, les matrices J^2, J^3, J^4 et J^{-1}.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f + f^2)$.

Exercice 2 :

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -2x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera une base et la dimension.
2. Montrer que E est stable par u, c'est-à-dire : $\forall (x,y,z) \in E,\ u((x,y,z)) \in E$.
3. Déterminer une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \in E^2$ et

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(où } (a,b) \in \mathbb{R}^2\text{)}.$$

Exercice 3 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 13 & -10 & 5 \\ 10 & -7 & 5 \\ -10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$.

On notera $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $0_{\mathbb{R}^3}$ l'application nulle de $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver le réel a tel que $f^2 - f + a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3}$ puis déterminer les racines λ_1 et λ_2 du polynôme $X^2 - X + a$ où $\lambda_1 < \lambda_2$.
2. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ formée du ou des vecteurs de $\mathcal{B}$ puis du ou des vecteurs de $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'expression analytique de $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ termes}}$ (pour cette déduction, on pourra d'abord déterminer les coordonnées d'un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$).