Exercice 1 :

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 sont rouges et 5 sont noires.
On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? bicolore ?
3. On conserve les trois boules extraites au cours de l'expérience (on ne les remet pas dans l'urne) et on effectue un second tirage dans l'urne et son nouveau contenu (on tire donc à nouveau simultanément et au hasard trois boules de l'urne).
   On note D l'évènement : "tirer exactement une boule rouge au cours du second tirage" et, pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$, on note R_i l'évènement : "le nombre de boule(s) rouge(s) tirée(s) au premier tirage est i".
   (a) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{R_i}(D)$ pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge au cours du second tirage ?
   (c) Écrire une fonction Python simulant l'expérience aléatoire (c'est-à-dire les deux tirages simultanés de trois boules) et renvoyant en sortie `True` si l'évènement D est réalisé, `False` sinon.
   (d) On obtient au cours du second tirage exactement une boule rouge.
   Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une boule rouge au cours du premier tirage ?

Exercice 2 :

Dans un casino, un joueur a dans sa poche deux dés. L'un est non pipé et l'autre est truqué :
le dé truqué donne le chiffre 6 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
Le joueur choisit un dé *au hasard* dans sa poche :

1. (a) Il lance le dé une fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un 6?
   (b) Il lance le dé deux fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne deux 6?
   (c) Plus généralement, s'il lance le dé n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), quelle est la probabilité qu'il obtienne n fois le chiffre 6?
   (d) Écrire une fonction Python simulant le choix au hasard de l'un des deux dés, puis n lancers du dé choisi (cette fonction prendra n en entrée). Cette fonction renverra `True` si le joueur a obtenu n fois le chiffre 6 et `False` sinon. Expliquer (éventuellement à l'aide d'une autre fonction Python) comment utiliser cette fonction pour vérifier le résultat obtenu à la question 1) c).
2. Il lance le dé 4 fois et il obtient quatre fois six. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le dé truqué ?
3. Se sentant menacé d'exclusion du casino, le joueur décide de se débarrasser du dé truqué. Pour cela, il choisit au hasard un dé et le lance :
   - S'il obtient un 6, il considère que c'est le dé truqué et le jette.
   - Sinon, il considère que c'est le dé honnête et jette l'autre dé.

   Quelle est la probabilité que le joueur ait conservé le dé truqué ?

Exercice 3 :

Une entreprise de restauration collective propose trois formules de repas à n clients, où n est un entier naturel non nul.

Chacun des clients choisit exactement **une** de ces trois formules au hasard et de façon équiprobable puis envoie un bon de commande à l'entreprise. L'entreprise réceptionne alors pour chacun de ses n clients son bon de commande et lui livre la formule choisie.

On suppose que les choix de formule des clients sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note :

- A_k l'évènement : "après réception du k^e bon, une seule formule a été choisie" ;
- B_k l'évènement : "après réception du k^e bon, exactement deux formules ont été choisies" ;
- C_k l'évènement : "après réception du k^e bon, les trois formules ont été choisies" ;

Enfin, on pose pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$: $a_k = P(A_k)$, $b_k = P(B_k)$ et $c_k = P(C_k)$.

Le tableau ci-dessous donne un exemple de choix de formule pour les cinq premiers bons reçus :

	1^{er} bon	2^e bon	3^e bon	4^e bon	5^e bon
numéro de la formule choisie	n^0 2	n^0 1	n^0 2	n^0 1	n^0 3

Dans ce cas B_2 est réalisé, C_4 n'est pas réalisé, mais C_5 l'est.

1. (a) Préciser les nombres a_1, b_1 et c_1.

   (b) Justifier les égalités : $a_2 = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, $c_2 = 0$.
   En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_2, B_2), déterminer de même a_3, b_3, c_3.

   (c) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 3, donner les valeurs des probabilités conditionnelles $P_{A_k}(A_{k+1})$, $P_{B_k}(A_{k+1})$, $P_{C_k}(A_{k+1})$, $P_{A_k}(B_{k+1})$, $P_{B_k}(B_{k+1})$, $P_{C_k}(B_{k+1})$, $P_{A_k}(C_{k+1})$, $P_{B_k}(C_{k+1})$, $P_{C_k}(C_{k+1})$.

2. (a) On considère la matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$

   $$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}.$$

   (b) En déduire une formule exprimant $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ en fonction de M et $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

3. (a) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, les égalités : $\begin{cases} a_n = \frac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \frac{2^n-2}{3^{n-1}} \\ c_n = 1 - \frac{2^n-1}{3^{n-1}} \end{cases}$.

   (b) Déterminer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

   (c) On considère le programme Python ci-dessous :

```python
n = 1
c = 1-(2**n-1)/3**(n-1)
while c < 0.95:
    n += 1
    c = 1-(2**n-1)/3**(n-1)
print(n)
```

Après exécution, on obtient l'affichage suivant : `11`.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.