Exercice 1 :

Soit $f(x,y) = \ln\left(\frac{1-x^2}{1+y}\right)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f (on mettra en évidence une réunion de produits cartésiens).
2. Déterminer la ligne de niveau 0 de f, c'est-à-dire l'ensemble des réels $(x,y) \in D_f$ tels que $f(x,y) = 0$. Représenter graphiquement cette ligne de niveau.
3. Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction $g : t \mapsto f(0,t)$ et étudier ses variations sur D_g (en précisant les limites aux bornes).
4. L'application $\left| \begin{array}{c} D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{array} \right.$ est-elle injective ? Surjective ? Justifier.

Exercice 2 :

On pose $f(x) = x - 3 - 2\sqrt{x+2}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. L'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - 3 - 2\sqrt{x+2} \end{array} \right.$ est-elle injective ? Surjective ?
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
4. Déterminer la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow [-1, +\infty[$.

Exercice 3 : *Rappel* : *toute réponse devra être soigneusement justifiée.*

Soit E un ensemble non vide et A une partie de E.

1. On considère $f : \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ B \mapsto B \cap A \end{array} \right.$.
   (a) On suppose $A = E$. Déterminer $f(B)$ pour toute partie B de E.
   Quelle est l'application f dans ce cas ?
   (b) On suppose $A \neq E$. Il existe donc un élément a de E tel que $a \notin A$.
      i. Le sous-ensemble $\{a\}$ admet-il un antécédent par f ? f est-elle surjective ?
      ii. Déterminer $f(\{a\})$ et $f(\varnothing)$. f est-elle injective ?
2. On considère $g : \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ B \mapsto B \cup A \end{array} \right.$
   (a) On suppose $A = \varnothing$. Déterminer $g(B)$ pour toute partie B de E.
   Quelle est l'application g dans ce cas ?
   (b) On suppose $A \neq \varnothing$. Il existe donc un élément a de A.
      i. L'ensemble vide $\varnothing$ admet-il un antécédent par g ? g est-elle surjective ?
      ii. Déterminer $g(\{a\})$ et $g(\varnothing)$. g est-elle injective ?