Exercice 1 :

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j).$$
   (b) Calculer
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j).$$
2. En déduire le calcul de
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j) \quad \text{puis de} \quad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|\,.$$

Exercice 2 :

Dans cet exercice, on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i$ si $q \neq 1$. Que vaut cette somme si $q = 1$?
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut j^k si k est un multiple de 3?
   Calculer $1 + j^k + j^{2k} = \sum\limits_{i=0}^{2} (j^k)^i$ quand k n'est pas un multiple de 3. Que vaut cette somme si k est un multiple de 3?
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire que
$$2^p + (1+j)^p + (1+j^2)^p = 3 \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{3m}.$$
   (*indication* : on écrira 2^p sous la forme $(1+1)^p$)
4. En déduire que
$$\sum_{m=0}^{p} \binom{p}{3m} = \frac{1}{3}\left(2^p + 2\cos\left(\frac{p\pi}{3}\right)\right).$$

Exercice 3 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Vérifier : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \times \binom{n}{k-1}$.
   (b) En déduire le signe de $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$ en fonction de k où $k \in [\![1, n]\!]$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel p appartenant à $[\![0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor]\!]$,
$$\forall k \in [\![p, n-p]\!],\ \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{p}$$
2. On suppose ici $n \geqslant 5$. Montrer :
$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 2\frac{(n-3)}{n(n-1)}.$$
3. Pour tout entier naturel n, on pose
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$
   Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.