**Exercice 1** :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $z^3 - 1$ sous forme d'un produit de deux facteurs.
2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$.
3. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z$ est solution de $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$ si et seulement si $\frac{z}{1+i\sqrt{2}}$ est solution de $x^3 = 1$.

   (b) En déduire les solutions complexes de $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$.
4. De même, donner les solutions de $z^3 = 5 - i\sqrt{2}$ puis celles de $z^3 = 5 + i\sqrt{2}$.

**Exercice 2** :

(Les deux questions sont indépendantes)

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et $(A)$ l'équation $z^2 + pz + q = 0$ d'inconnue $z$.

   On suppose que $(A)$ admet deux solutions non réelles conjuguées.

   Montrer que $p^2 = 4q\cos^2(\theta)$ où $\theta$ est un argument de l'une des solutions de $(A)$.
2. Soit $z$ un nombre complexe non réel tel que $1 - z + z^2 \neq 0$ et

$$\frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2} \in \mathbb{R}$$

   Démontrer que $|z| = 1$.

**Exercice 3** :

On note $(E)$ l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ d'inconnue $z$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Rappeler une expression simple, sous forme de fraction, de

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4.$$

2. En déduire que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est solution de $(E)$.
3. Soit $z$ une solution de $(E)$. Montrer que si on pose $x = z + \frac{1}{z}$, alors $x^2 + x - 1 = 0$.
4. En déduire une expression explicite de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
5. En s'inspirant de la méthode précédente, donner également une expression explicite de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

 