Exercice 1 **:**(Les deux questions ci-dessous sont indépendantes)

1. Déterminer le rang et la ou les solutions du système suivant : $(T_1) : \begin{cases} 2x+7y-2z=36 \\ 2x+y+2z=4 \\ -x+y+z=9 \end{cases}$.

2. Soit a, b, c trois réels et $(T_2) : \begin{cases} 6y+2z+3w=a \\ 3x+y+2z+2w=b \\ -9x+9y-2z=c \end{cases}$.

   (a) Déterminer le rang de (T_2).

   (b) À quelle condition sur a, b et c le système (T_2) est-il compatible ?

   (c) Déterminer les solutions de (T_2) lorsque $(a,b,c)=(-1,-1,1)$.

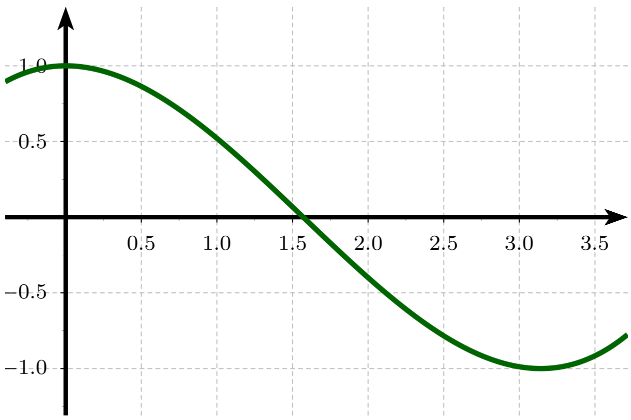
Exercice 2 **:**

Soit $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a_1\neq a_2$. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^4$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale f de degré inférieur ou égal à 3 telle que :

$$f(a_1)=\lambda_1,\ f'(a_1)=\mu_1,\ f(a_2)=\lambda_2,\ f'(a_2)=\mu_2.$$

2. On suppose ici $a_1=0$ et $a_2=\pi$. On a représenté ci-dessous le graphe d'un polynôme f tel que celui de la question précédente :



   (a) Avec les notations de la question 1, déterminer les valeurs de λ_1, λ_2, μ_1 et μ_2.

   (b) Le polynôme f est une approximation sur $[0,\pi]$ d'une fonction usuelle. Laquelle ?

   (c) Déterminer l'expression de $f(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 3 : *Deux systèmes non linéaires*

Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Résoudre le système (S_1) : $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ 2x^2 - xy + 3y^2 = 13 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$ d'inconnues x, y.

2. On considère le système (S_2) : $\begin{cases} \frac{ab^2}{c} = 2 \\ \frac{c^3}{a^2b^3} = 1 \\ \frac{ab}{c^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'inconnues les réels non nuls a, b et c.

   (a) Soit (a, b, c) une solution de (S_2). Justifier que a, b et c sont de même signe.

   (b) On suppose que a, b et c sont des réels strictement positifs. Montrer que (a, b, c) est solution de (S_2) si et seulement si $(\ln(a), \ln(b), \ln(c))$ est solution d'un système linéaire qu'on déterminera. Résoudre ensuite ce dernier système et déterminer son rang.

3. Déterminer toutes les solutions de (S_2).