Exercice 1 :

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et (S) le système linéaire $\begin{cases} x+y-2z=a \\ 3x+2y+z=b \\ 2x+y+2z=c \end{cases}$ d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   Échelonner le système (S). En déduire son rang et son nombre de solution(s).

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} + v_{n+1} - 2w_{n+1} = 3w_n \\ 3u_{n+1} + 2v_{n+1} + w_{n+1} = w_n \\ 2u_{n+1} + v_{n+1} + 2w_{n+1} = -3 \end{cases}.$$

   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

   (b) En déduire w_n, v_n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [-1,1]$, on pose :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \end{cases}.$$

1. (a) Soit $x \in [-1,1]$. De quel type est la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$?

   (b) En déduire : $\forall x \in \,]-1,1[\,$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Montrer que cette égalité reste vraie si $x \in \{-1,1\}$.

2. On se propose ici de vérifier le précédent résultat et, pour $x \in [-1,1]$, on pose $S_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

   (a) Soit $x \in [-1,1]$. Calculer $S_0(x)$ et $S_1(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Linéariser $\cos(a)\cos(b)$.

   (c) En déduire : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $xS_n(x) = \frac{S_{n+1}(x)+S_{n-1}(x)}{2}$ puis $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = T_n(x)$.

Exercice 3 :

On pose $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

1. Démontrer par une récurrence simple : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$.

2. (a) Calculer explicitement f_n en fonction de n. En déduire l'existence d'un réel a tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - (-a)^{-n}\right)$$

   puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

   (b) Écrire une fonction Python calculant f_n et f_{n+1} en fonction de n. La fonction devra retourner la liste $[f_{n+1}, f_n]$ en sortie.

   (c) En déduire une fonction Python prenant en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et déterminant le premier entier $n \geqslant 1$ tel que le rationnel $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ soit une approximation de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ à ε près.