

Chapitre 16 : Caractère local des fonctions : Limite et continuité en un point**I - Définitions et premières propriétés**

- 1) Limites finies
- 2) Limites infinies
- 3) Continuité
- 4) Prolongement par continuité
- 5) Limites et continuité à droite et à gauche
- 6) Caractère local de la limite et de la continuité

II - Limites et ordre

- 1) Les théorèmes généraux
- 2) Limites des fonctions monotones

III - Opérations sur les limites

- 1) Opérations algébriques sur les limites finies
- 2) Opérations sur les limites infinies
- 3) Composition des limites
- 4) Application à la continuité

Continuité des fonctions usuelles (polynômes, rationnelles, puissance, ln, exp, trigonométriques)

IV - Relations de comparaison

- 1) Fonctions équivalentes au voisinage d'un point
- 2) Propriétés des équivalents
- 3) Comparaisons usuelles
 - a) Polynômes et fonctions rationnelles
 - b) Puissances entre elles
 - c) Puissances et logarithme
 - d) Puissances et exponentielle
- 4) Équivalents usuels
- 5) Équivalents et composition

Mises en garde

V - Quelques exemples de calculs de limites**Annexe** :

Comparaisons classiques (preuve des résultats sur les croissances comparées, et inégalités classiques sur les fonctions usuelles)

Caractérisation séquentielle de la limite (Application à la non existence de limite)

Exemples de compétences attendues

- ❶ Maîtriser les formules de croissances comparées.
Connaître les équivalents usuels, les propriétés de \exp , \ln et $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- ❷ Savoir ce que signifie qu'une fonction est continue en un point a et savoir montrer qu'une fonction est continue en a .
- ❸ Savoir déterminer si une fonction est prolongeable par continuité en un point et, après prolongement, si elle est dérivable en ce point, voire de classe C^1 au voisinage de ce point.
- ❹ Savoir utiliser les équivalents (et notamment les équivalents usuels) au service des calculs de limites.
- ❺ Savoir utiliser la caractérisation séquentielle de la limite.

Exemples de questions d'application du cours possibles :

- Démontrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ puis, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \right) = 0$.
- Montrer $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et en déduire un équivalent en 0 de $\ln(\cos x)$.
- Donner les équivalents usuels et indiquer comment ils se démontrent.

Chapitre 17 : Limites de suites réelles (début)

I - Limite d'une suite

- 1) Suites convergentes
- 2) Suites réelles de limite infinie
- 3) Suites divergentes
- 4) Limites et ordre
- 5) Opérations sur les limites
- 6) Equivalents
- 7) Relations de comparaison classiques

Exemples de compétences attendues

- ❶ Savoir utiliser les équivalents usuels pour calculer des limites de suites dont le terme général est explicite.
- ❷ Savoir utiliser le théorème d'encadrement et le théorème de convergence monotone pour les suites monotones bornées (révision du Lycée).

Question d'application du cours possible :

- Montrer que la suite $(H_n) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.