$\boxed{\text{Chapitre 18}}$: L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et ses sous-espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I - L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

1) Définition de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

2) Règles de calculs

3) Exemples

II - Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

1) Définition et exemples

2) Combinaisons linéaires

III - Indépendance linéaire, base

1) Familles libres, familles liées

2) Base d'un sous-espace vectoriel

IV - Théorie de la dimension

1) Dimension d'un sous-espace vectoriel

2) Familles libres, familles génératrices et dimension

3) Dimension et inclusion

4) Rang d'une famille de vecteurs

Exemples de compétences attendues

❶ Savoir justifier qu'une partie de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
(en utilisant la définition, ou en mettant en évidence une famille génératrice)

❷ Savoir déterminer un système d'équations cartésiennes décrivant un sous-ev de $\mathbb{K}^n$
à partir d'une famille génératrice du sous-ev.

❸ Savoir effectuer le procédé inverse : déterminer une famille génératrice d'un sous-ev
de $\mathbb{K}^n$ à partir d'un système d'équations cartésiennes décrivant celui-ci.

❹ Savoir déterminer si une famille est libre ou liée.

❺ Pour $n = 2$, 3, 4, savoir montrer qu'une famille de vecteurs est une base de $\mathbb{K}^n$ en déterminant dans le même temps l'expression des coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{K}^n$ dans cette base. Savoir déterminer la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

❻ Si E est un sous-ev de $\mathbb{K}^n$, savoir trouver une base de E
en trouvant d'abord une famille génératrice de E puis en montrant qu'elle est libre.

❼ Si $m = \dim E$ est connu, savoir montrer qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de E
est une base de E en vérifiant :

- que $\mathcal{F}$ est génératrice de E et $Card\mathcal{F} = m$, ou
- que $\mathcal{F}$ est libre et $Card\mathcal{F} = m$.

❽ Savoir montrer l'égalité de deux sous-ev de $\mathbb{K}^n$: Si E et F sont deux sous-ev de $\mathbb{K}^n$ tels que $E \subset F$ et $\dim E = \dim F$, alors $E = F$.

❾ Savoir utiliser les techniques matricielles pour calculer le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs d'un sous-ev E de $\mathbb{K}^n$ et détérminer

- si la famille $\mathcal{F}$ est libre ($Card\mathcal{F} = rg\mathcal{F}$) ou liée,
- si $\mathcal{F}$ est une base de $Vect\mathcal{F}$ ($Card\mathcal{F} = rg\mathcal{F}$),
- si $\mathcal{F}$ est génératrice de E ($rg\mathcal{F} = dimE$) et, le cas échéant, si $\mathcal{F}$ est une base de E ($Card\mathcal{F} = rg\mathcal{F} = dimE$).

❿ Parallèlement au calcul du rang de $\mathcal{F}$,

- savoir extraire de $\mathcal{F}$ une base de $Vect\mathcal{F}$,
- savoir déterminer une relation de dépendance linéaire sur $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est une famille liée.

Chapitre 19 : Applications linéaires (début)

I - Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

1) Définitions et exemples

2) Noyau et image d'une application linéaire

3) Opérations sur les applications linéaires

4) Applications linéaires et bases

5) Applications linéaires et dimension

Remarques

On ne traite dans ce chapitre **que** des applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
Les représentations matricielles des applications linéaires ne sont pas encore au programme de cette semaine.

Exemples de compétences attendues

1. Maîtriser les définitions du noyau, de l'image, du rang d'une application linéaire.
2. Savoir montrer qu'une application est linéaire.
3. Savoir calculer le rang d'une application linéaire.
4. Savoir trouver une base du noyau et de l'image d'une application linéaire.
5. Savoir déterminer si une application linéaire est injective, surjective ou bijective (dont le cas particulier des endomorphismes).

Questions de cours possibles :

- *Énoncer et démontrer* :
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les bases d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{K}^n$ sont les familles libres et génératrices de E.
- *Énoncer et démontrer* :
  Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Alors :
  $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels respectivement de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.
- *Énoncer et démontrer les résultats suivants* :
  Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Alors :
  f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = \mathbb{K}^n$.
  f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.