Chapitre 19 : Applications linéaires

I - Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

1) Définitions et exemples

2) Noyau et image d'une application linéaire

3) Opérations sur les applications linéaires

4) Applications linéaires et bases

5) Applications linéaires et dimension

II - Utilisation des matrices

1) Matrice d'une application linéaire

2) Matrices d'applications linéaires et opérations

3) Lien avec le rang d'une matrice

4) Applications linéaires, matrices et systèmes linéaires

Remarques

On ne traite dans ce chapitre **que** des applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

Exemples de compétences attendues

❶ Maîtriser les définitions du noyau, de l'image, du rang d'une application linéaire.

❷ Savoir montrer qu'une application est linéaire.

❸ Savoir calculer le rang d'une application linéaire.

❹ Savoir trouver une base du noyau et de l'image d'une application linéaire.

❺ Savoir déterminer si une application linéaire est injective, surjective ou bijective (dont le cas particulier des endomorphismes).

❻ Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans les bases canoniques.
Savoir effectuer le procédé inverse : retrouver une application linéaire à partir de sa matrice dans les bases canoniques.

❼ Savoir traduire matriciellement les opérations usuelles sur les applications linéaires.

❽ Savoir déterminer la bijection réciproque d'une application linéaire bijective.

❾ Savoir calculer la matrice d'une application linéaire dans des bases quelconques.

Questions de cours possibles :

- *Énoncer et démontrer* :

  Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^p$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

  Alors $\mathrm{Im} f = Vect(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \ldots, f(\overrightarrow{e_m}))$.

  Application :

  Calculer le rang de f et une base de $\mathrm{Im} f$ si f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -1 & -8 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

- *Énoncer et démontrer* :

  Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Alors :

  $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels respectivement de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

- *Énoncer et démontrer les résultats suivants* :

  Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Alors :

  f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = \mathbb{K}^n$.

  f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.