Chapitre 20: Espaces probabilisés finis

I - Dénombrement

1) Définitions et généralités

Ensembles équipotents, ensembles finis, cardinal d'un ensemble fini.

Cardinal d'une résunion finie d'ensembles finis deux à deux disjoints.

Cardinal d'une réunion de deux ensembles finis.

Cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis.

2) Dénombrements usuels

II - Espaces probabilisés finis

1) Univers et événements

2) Notion de probabilité

III - Probabilité conditionnelle et théorèmes principaux

1) Définition

2) La formule des probabilités composées

3) La formule des probabilités totales

4) La formule de Bayes

5) Indépendance

Annexe : Quelques outils pour effectuer des simulations aléatoires avec Python

Exemples de compétences attendues

1. Savoir calculer le cardinal d'une réunion disjointe (ou d'une réunion quelconque de deux ensembles).
2. Savoir comment et quand utiliser le passage par dénombrement du complémentaire.
3. Savoir utiliser la technique du "découpage" en petits ensembles plus faciles à dénombrer.
4. Savoir modéliser les situations combinatoires à l'aide d'un vocabulaire précis.
5. Connaître et utiliser les dénombrements usuels (nombre de parties d'un ensemble, nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, nombre de p-listes avec ou sans répétition...).
6. Dans des cas simples, savoir modéliser et dénombrer l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
7. Connaître et savoir utiliser les propriétés d'une probabilité.
8. Savoir calculer des probabilités d'évènements à l'aide de la probabilité uniforme (quand cela s'avère judicieux).
9. Connaître la définition d'une probabilité conditionnelle.
10. Savoir reconnaître quand utiliser et savoir utiliser la formule des probabilités composées.
11. Savoir reconnaître quand utiliser et savoir utiliser la formule des probabilités totales.

⓬ Savoir reconnaître quand utiliser et savoir utiliser la formule de Bayes.

⓭ Savoir élaborer une hypothèse d'indépendance (mutuelle ou deux à deux) et l'utiliser pour calculer des probabilités.

⓮ Savoir effectuer des simulations d'expériences aléatoires élémentaires avec Python.

Questions de cours possibles:

❶ Énoncer les propriétés du cardinal d'un ensemble fini (cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis deux à deux disjoints, cardinal d'une réunion de deux ensembles finis).

Donner les formules pour les dénombrements usuels (nombre de parties d'un ensemble fini, nombre de parties de cardinal k d'un ensemble fini, nombre de p-listes (avec ou sans répétition) d'un ensemble fini E).

❷ Donner **la définition** et **les propriétés** d'une probabilité sur un univers fini (*cf* propriétés ci-dessous).

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Alors:
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles,
alors $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un système complet d'évènement, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

❸ Énoncer la formule des probabilités composées, la formule des probabilités totales et la formule de Bayes. Démontrer ces deux dernières formules.