Chapitre 21 Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

I - Variables aléatoires réelles

1) Généralités

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

3) Fonction de répartition

4) Image d'une variable aléatoire réelle par une application

5) Espérance et moments

Théorème de transfert, variance, écart-type.

6) Inégalités classiques

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

II - Lois de probabilité usuelles

1) La loi certaine

2) La loi uniforme

3) Loi de Bernoulli

4) Loi binomiale

5) Loi hypergéométrique

Exemples de compétences attendues

Si X est une variable aléatoire finie,

1. Savoir donner sa loi (données de $X(\Omega)$ et des $P(X = k)$ avec $k \in X(\Omega)$),
2. savoir déterminer sa fonction de répartition F_X,
3. savoir calculer $E(X)$ et $V(X)$ (espérance et variance de X),
4. Si $u : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une application, savoir déterminer la loi de $u(X)$ et savoir calculer directement $E(u(X))$ (par le théorème de transfert).
5. Savoir simuler (avec `Python`) une variable aléatoire dans des cas assez simples ou dans le cas où la loi est usuelle.
6. Connaître les caractéristiques des lois usuelles et reconnaître les situations où elles interviennent. Savoir justifier rigoureusement pourquoi on a affaire à telle ou telle loi.

Question de cours possible :
Définitions et propriétés des lois usuelles (Bernoulli, binomiale, uniforme, hypergéométrique).

Chapitre 22 : **Développements limités**

I - Généralités

1) Fonction négligeable devant une autre en un point

2) Développement limité

3) Quelques développements limités usuels

4) Premiers résultats sur les DL

troncature d'un DL, DL en 0 de fonctions paires ou impaires, partie principale d'un DL, conséquence de l'existence d'un DL d'ordre 1 sur la régularité de la fonction au point considéré, théorème de primitivation d'un DL.

II - Opérations sur les développements limités en 0

1) Somme de développements limités

2) Produit de développements limités

3) Composition de développements limités

4) Quotients de développements limités

III - Applications des développements limités

1) Calculs de limites, d'équivalents, étude d'existence d'extrêmum local

2) Etude de régularité en un point à problème

3) Equation de la tangente et position relative par rapport à la tangente

4) Recherche d'asymptotes obliques

Exemples de compétences attendues

❶ Connaître la formule de Taylor-Young en 0 (hypothèse et conclusion).
Savoir identifier les dérivées n^e en 0 à partir d'un DL en 0 d'une fonction f définie et de classe C^n au voisinage de 0.

❷ Connaître les développements limités usuels.

❸ Savoir calculer des développements limités de combinaisons linéaires, de produits et de composées de fonctions.

❹ Savoir déterminer un équivalent d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ à l'aide d'un développement limité en a.

❺ À l'aide d'un développement limité d'ordre 1 d'une fonction f en un réel a,
savoir déterminer si f est prolongeable par continuité en a et déterminer $f(a)$ le cas échéant (après prolongement).
Le cas échéant, savoir déterminer si la fonction est dérivable en a et déterminer $f'(a)$ si tel est le cas.

❻ À l'aide d'un développement limité d'ordre $\geqslant 2$ d'une fonction f en un réel a,
savoir "lire" l'équation de la tangente à la courbe de f en a et déterminer la position locale de cette tangente par rapport à la courbe.

❼ À l'aide d'un développement limité d'ordre $\geqslant 2$ d'une fonction f en $\pm\infty$,
savoir déterminer l'équation d'une éventuelle asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$ ainsi que la position locale de cette asymptote par rapport à la courbe de f.

❽ Savoir utiliser les développements limités, dans une démarche guidée, pour l'étude locale d'une fonction.

❾ Savoir déterminer les natures des branches infinies d'une fonction.

Question de cours possible : Expliquer ce que la notation $f = \underset{a}{o} g$ signifie. Donner tous les DL usuels en 0.

Chapitre 23 : **Fonctions de deux variables**

I - Quelques définitions

1) Fonctions partielles

2) Dérivées partielles

Définition et fonctions de classe C^1 sur une partie de $\mathbb{R}^2$. Gradient.

II - Quelques résultats

1) Développement limité à l'ordre 1

2) Dérivée d'une fonction composée $I \xrightarrow{(\varphi,\psi)} A \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$ (avec $I \subset \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}^2$).

3) Extrêmums locaux

4) Dérivées partielles d'ordre 2

Théorème de Schwarz

Exemples de compétences attendues

❶ Savoir calculer des dérivées partielles d'ordre 1 ou d'ordre 2.

❷ Savoir évaluer les petites variations d'une fonction de deux variables (DL1).

❸ Savoir étudier la nature de points critiques (points selles, extrêmums locaux).

❹ Savoir dériver une fonction composée.

❺ Savoir utiliser le théorème de Schwarz

Question d'application du cours possible :

Soit $f : (x, y) \mapsto x^3y^2 + xy$.

1) Expliquer pourquoi le théorème de Schwarz peut s'appliquer à f ici. Le vérifier sur cet exemple.

2) Déterminer le ou les points critiques de f. Calculer $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire que f n'a pas d'extrêmums sur $\mathbb{R}^2$.